לגבי המטלות: יהיה מבחן בסוף הקורס.
במבנה של המבחנים משנים קודמות (יש שנתיים אחורה, בכל ששנה יש שני מועדים, לפני שנתיים היה מבחן לדוגמא).
תזכורת: בשבוע שעבר הגדרנו פונקציות טריגונומטריות:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

הוכחנו כמה תכונות של הפונקציות הטריגונומטריות המרוכבות (למשל הראינו ש- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$)
נוכיח עוד כמה תכונות.
1. cos היא פונקציה זוגית ו-sin היא פונקציה אי זוגית.
כלומר,

$$\cos(-z) = \cos z$$

$$\sin(-z) = -\sin z$$

הוכחה:

$$\cos(-z) = \frac{e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}}{2} = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$\sin(-z) = \frac{e^{i(-z)} - e^{-i(-z)}}{2i} = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z$$

2. $\sin z = 0 \iff z = \pi k$
הוכחה:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0$ אמ"ם $e^{iz} - e^{-iz} = 0$ אמ"ם $e^{iz} = e^{-iz}$.
תזכורת:

$$e^{z_1} = e^{z_2}$$

אמ"ם $z_1 - z_2 = 2\pi ik$.
במקרה שלנו: $iz - (-iz) = 2\pi ik$.
כלומר, $2iz = 2\pi ik$
נצמצם $2i$.
נקבל: $z = \pi k$.

3. $\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + \pi k$

הוכחה: בשיעור הקודם הוכחנו שמתקיים לכל מספר מרוכב:

$$\cos z = \sin(\frac{\pi}{2} - z)$$

נסתמך על השוויון הזה שהוכחנו+ תכונה 2, בשביל להוכיח את הטענה.

$$\cos z = 0 \iff \sin(\frac{\pi}{2} - z) = 0 \iff \frac{\pi}{2} - z = \pi k \iff z = \frac{\pi}{2} - \pi k = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

השוויון האחרון נכון כי אפשר להציב בk כל מספר שלם (חיובי ושלילי)

הוכחה נוספת:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0$ אמ"ם $e^{iz} + e^{-iz} = 0$ אמ"ם $e^{iz} = -e^{-iz}$

$-1 = e^{\pi i}$.

$$e^{\pi i} = e^{0+\pi i} = e^0 cis(\pi) = cis(\pi) = -1$$

$$e^{iz} = e^{\pi i} e^{-iz} = e^{\pi i - iz} =$$

$$iz - (\pi i - iz) = 2\pi i k$$
$$2iz - \pi i = 2\pi i k$$
$$2iz = \pi i + 2\pi i k$$

נחלק ב$2i$:

$$z = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

4. ל$\cos$ ול$\sin$ יש מחזוריות של 2π. כלומר, לכל מספר מרוכב z:

$$\cos z = \cos(z + 2\pi)$$

$$\sin z = \sin(z + 2\pi)$$

הוכחה:

$$\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz}e^{2\pi i} + e^{-iz}e^{-2\pi i}}{2} = \frac{e^{iz} \cdot 1 + e^{-iz} \cdot 1}{2} =$$

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$\sin(z+2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz}e^{2\pi i} - e^{-iz}e^{-2\pi i}}{2i} = \frac{e^{iz} \cdot 1 - e^{-iz} \cdot 1}{2i} = \sin z$$

חזקות מרוכבות

אנחנו רוצים להגדיר מה זה $z_1^{z_2}$ כאשר z_1 וz_2 הם מספרים מרוכבים כלשהם. (כמובן שזה כולל גם מספרים ממשיים).

למשל: לביטוי 2^i אין משמעות. כי אנחנו צריכים לדעת מה החלק הממשי והחלק המדומה. או לחילופין, מה הנורמה והזווית. כלומר, אנחנו צריכים לדעת למקם את המספר על המישור.

נשתמש בטריק הבא:

$$z_1^{z_2} = e^{\ln_{\mathbb{C}}(z_1^{z_2})} = e^{z_2 \ln_{\mathbb{C}} z_1}$$

נשים לב ש$\ln_{\mathbb{C}} z_1$ זה משהו שאנחנו יודעים לחשב לכל מספר מרוכב שונה מ0.

ואנחנו מקבלים איזשהו מספר מרוכב.

ברגע שיש מספר מרוכב, אנחנו יודעים להכפיל אותו עם z_2, כי אנחנו יודעים להכפיל שני מספרים מרוכבים. ונקבל איזשהו מספר מרוכב.

לסיום, אנחנו יודעים לחשב e בחזקת כל מספר מרוכב.

הערות:

1. מכיוון ש$\ln_{\mathbb{C}}$ לא מוגדר ב0, (כי e^z אף פעם לא שווה 0), אז לא ניתן להגדיר חזקות של 0.
2. ראינו של$\ln_{\mathbb{C}}$ יש כמה ענפים. כלומר, $\ln_{\mathbb{C}} z_1$ הוא לא מספר יחיד, אלא קבוצה של אינסוף מספרים. ויש ענף אחד שנקרא ה"ענף העיקרי" (כאשר הזווית בטווח $(-\pi, \pi]$).

לכן גם לחזקה יכולים להיות כמה ערכים, אפילו אינסוף ערכים, ויש ערך אחד שהוא נקרא "הערך העיקרי".

דוגמאות:

1. חשבו: 2^i

פתרון:

שלב ראשון:

$$2^i = e^{\ln_{\mathbb{C}} 2^i} = e^{i \ln_{\mathbb{C}} 2}$$

$$\ln_{\mathbb{C}} 2 =?$$

$$e^{x+iy} = 2 = 2cis(0)$$

$$e^x cis(y) = 2cis(0)$$

$$e^x = 2 \Longrightarrow x = \ln 2$$

$$y = 0 + 2\pi k$$

$$\ln_{\mathbb{C}} 2 = \ln 2 + 2\pi k i$$

שלב שני:

$$i \ln_{\mathbb{C}} 2 = i(\ln 2 + 2\pi k i) = -2\pi k + i \ln 2$$

שלב שלישי:

$$e^{-2\pi k + i \ln 2} = e^{-2\pi k} cis(\ln 2)$$

ניתן לחשב במחשבון במפורש את $cis(\ln 2)$ ע"י חישוב $\cos(\ln 2)$ ו$\sin(\ln 2)$. מחשבים ברדיאנים, לא במעלות!!!!

שימו לב שקיבלנו איסוף תשובות, כי אפשר להציב בk כל מספר שלם.

במקרה הספציפי הזה, לכל התשובות יש את אותה זווית, אבל רדיוס שונה.

כלומר, 2^i זה לא מספר יחיד, אלא אינסוף מספרים.

יש ענף עיקרי לחזקה, שמתקבל מהענף העיקרי של הln.

מה הענף העיקרי של $\ln_{\mathbb{C}} 2$?

הזווית היחידה מהצורה $0 + 2\pi k$ שנמצאת בתחום $(-\pi, \pi]$ היא 0 .

לכן $\ln_{(-\pi,\pi]} 2 = \ln 2 + 0i = \ln 2$

לכן הענף העיקרי של 2^i הוא:

$$e^{i \ln 2} = cis(\ln 2)$$

2. חשבו: i^i.

שלב ראשון:

$$i^i = e^{\ln_{\mathbb{C}} i^i} = e^{i \ln_{\mathbb{C}} i}$$

$$\ln_{\mathbb{C}} i$$

$$e^{x+iy} = i = cis(\frac{\pi}{2})$$

$$e^x = 1 \Longrightarrow x = 0$$

$$cis(y) = cis(\frac{\pi}{2}) \Longrightarrow y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\ln_{\mathbb{C}} i = x + iy = i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$$

שלב שני:

$$i\ln_{\mathbb{C}} i=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$$

שלב שלישי:

$$e^{i\ln_{\mathbb{C}} i}=e^{-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k}$$

ואין מה לחשב יותר, כי זה e בחזקת מספר ממשי. כלומר, זאת התשובה הסופית.
נשים לב שיש אינסוף ערכים.
מי הערך העיקרי?
הערך העיקרי מתקבל כאשר לוקחים זווית בתחום $(-\pi,\pi]$. מתקבל כאשר $k=0$, כלומר $y=\dfrac{\pi}{2}$.

$$\ln_{(-\pi,\pi]} i=i\frac{\pi}{2}$$

ולכן הענף העיקרי של החזקה שווה ל-

$$e^{i(i\dfrac{\pi}{2})}=e^{-\dfrac{\pi}{2}}$$

הערה: כאשר מחשבים את הערך העיקרי של החזקה, בשביל לגלות את הk המתאים, צריך לחזור לשלב של חישוב $\ln_{\mathbb{C}}$ ולבחור k שיתן לנו y בתחום המבוקש.
לכן שמגלים מי הk, אפשר לחזור לנוסחא הכללית של $z_1^{z_2}$ ולהציב שם את הk שמצאנו. מקבלים מספר אחד מסויים.