תרגול 6-אושרית

מרחבי מכפלה פנימית

מרחבי מכפלה פנימית

הגדרה: V מ"ו מעל $\mathbb{F}$.

מכפלה פנימית (סקלרית) על V היא פונקציה $\langle\ ,\ \rangle : V\times V \to \mathbb{F}$

המקיימת את התכונות: 1. אי-שליליות: לכל $v\in V$ $\langle v,v\rangle \geq 0$

ומתקיים: $\langle v,v\rangle = 0 \iff v=0$

2. סימטריות (הרמיטיות): לכל $u,v\in V$ מתקיים:

$\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$

שימו לב שמעל הממשיים מ"פ היא חילופית

3. לינאריות במשתנה הראשון: לכל $u,v,w\in V$

ולכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$:

$\langle \alpha u+\beta v, w\rangle = \alpha\langle u,w\rangle + \beta\langle v,w\rangle$

הערה: לכל מ"ו V יש הרבה מ"פ שונות על V

דוגמא:

ב- $\mathbb{R}^n$ עם המ"פ הסטנדרטית (המרחב האוקלידי)

$\vec{v} = (x_1, \dots, x_n)$

$\vec{w} = (y_1, \dots, y_n)$

המ"פ הסטנד' ב- $\mathbb{R}^n$

$$\boxed{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}$$

ז"א $\langle v, w \rangle = v \cdot w^T = (x_1, \dots, x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

זו אכן מ"פ. נראה שתכונות ההגדרה מתקיימות

שקופית הבאה

דוגמא לחישוב:

$V = \mathbb{R}^3$ (מעל R

אז $\langle (0,1,-1),(3,2,2) \rangle = 0\cdot 3 + 1\cdot 2 - 1\cdot 2 = 0$

הוכחה שאכן מ"פ:

תכונה 1-הוכחת אי שליליות

$$< v,v >=< (x_1,\dots,x_n),(x_1,\dots,x_n) \geq \sum_{i=1}^{n} x_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$

ואכן,

$$< v,v \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i, x_i = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

תכונה 2-הרמיטיות:

$$< v,w > =< (v_1,\dots,v_n),(w_1,\dots,w_n) >$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = \sum_{i=1}^{n} w_i v_i$$

$$= < (w_1,\dots,w_n),(v_1,\dots,v_n) > =< w,v >$$

חילופיות בשדה
R

תכונה3-ליניאריות רכיב ראשון:

$$< u + \alpha v, w >= < (u_1, \dots, u_n) + \alpha(v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_n) >=$$

$$=< (u_1 + \alpha v_1, \dots, u_n + \alpha v_n), (w_1, \dots, w_n) >$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (u_i + \alpha v_i) w_i = \sum_{i=1}^{n} u_i w_i + \alpha \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = < u, w > + \alpha < v, w >$$

לפי הגדרת המ"פ

פילוג בR

תרגיל:

הוכיחו כי המכפלה הסטנדרטית על הממשיים בחזקת n לינארית ברכיב שני.

פתרון

יהיו u,v,w בממשיים בחזקת n
ואלפא ובטא ממשיים

$$\langle w, \alpha u+\beta v\rangle \underset{\text{לפי תכונה 2}}{=} \overline{\langle \alpha u+\beta v, w\rangle} \underset{\text{כי בממשים אין משמעות לצמוד}}{=} \langle \alpha u+\beta v, w\rangle \underset{\text{לפי תכונה 3}}{=} \alpha\langle u,w\rangle+\beta\langle v,w\rangle$$

$$\underset{\text{תכונה 2}}{=} \alpha\overline{\langle w,u\rangle}+\beta\overline{\langle w,v\rangle} \underset{\text{ממשים}}{=} \alpha\langle w,u\rangle+\beta\langle w,v\rangle$$

הגדרת מכפלה פנימית מעל המרוכבים בחזקת n

(2) $\mathbb{C}^n$. ניקח לדוגמה את $\mathbb{C}^2$.

אם היינו מנסים להגדיר מ"פ כמו ב-$\mathbb{R}^n$ אז היינו מקבלים לדוגמה:

$$\langle (i,i),(i,i)\rangle = i^2+i^2 = -2 < 0$$

לא מקיים אי-שליליות!

ולכן: את המ"פ הסטנדרטית מעל $\mathbb{C}^n$

$$\boxed{\langle v,w\rangle = v\cdot \overline{w}^T}$$

כך

$$\langle (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\rangle = x_1\overline{y_1}+\dots+x_n\overline{y_n}$$

קל לראות 😊 שאכן לפי הגדרה זו נקבל מ"פ. לדוגמה נראה

שמתקיים חיוביות: יהי $v=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n$

$$\langle v,v\rangle = \sum x_i\overline{x_i} = \sum |x_i|^2 > 0$$

שיעורי בית לבדוק שאכן מכפלה פנימית (להשלים את האקסיומות החסרות)

דוג' למ"פ לא סטנדרטיות:

נגדיר מעל $\mathbb{R}^2$: $\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2 + 2y_1y_2$

נבדוק ש- 3 התכונות עדיין מתקיימות

① אי-שליליות:

א. $\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2+2y^2 \geq 0$ ✓

ב. $(x,y)=\vec{0} \iff \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \iff x^2+2y^2=0 \iff \langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$

הרמיטיות

נוכיח $\forall u,v\in\mathbb{R}^2 \quad \langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle} \underset{\mathbb{R}\text{ מעל}}{=} \langle v,u\rangle$

$u=(x_1,y_1)$, $v=(x_2,y_2)$

$\langle u,v\rangle = \langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2+2y_1y_2$

$\langle v,u\rangle = \langle (x_2,y_2),(x_1,y_1)\rangle = x_2x_1+2y_2y_1$

אכן שווים בגלל חילופיות הכפל ב- $\mathbb{R}$

תכונה 3 בעמוד הבא

לינאריות רכיב ראשון

$\forall\, u,v,w \in \mathbb{R}^2$

$$\langle \alpha u+\beta v, w\rangle = \langle \alpha(x_1,y_1)+\beta(x_2,y_2),(x_3,y_3)\rangle$$

$$=\langle(\alpha x_1+\beta x_2, \alpha y_1+\beta y_2),(x_3,y_3)\rangle$$

לפי הגדרת סכום וקטורים באר בריבוע

$$= (\alpha x_1+\beta x_2)x_3 + 2(\alpha y_1+\beta y_2)y_3 =$$

לפי הגדרת המ"פ שלנו

$$= \alpha(x_1x_3+2y_1y_3)+\beta(x_2x_3+2y_2y_3)=$$

פילוג

$$=\alpha\langle(x_1,y_1),(x_3,y_3)\rangle+\beta\langle(x_2,y_2),(x_3,y_3)\rangle$$

לפי הגדרת המ"פ שלנו

$$=\alpha\langle u,w\rangle+\beta\langle v,w\rangle$$

לפי סימונים שלנו לu v w

3 התכונות מתקיימות ולכן זו מ"פ

סימון: $B^* = \overline{B}^T$

2. דוג' למ"פ על מטריצות: יהיו $A,B \in \mathbb{C}^{n\times n}$

ונגדיר $\langle A,B\rangle = tr(AB^*)$

זוהי מ"פ, נוכיח לדוג' את תכונה 2:

כלומר, צ"ל $\langle A,B\rangle = \overline{\langle B,A\rangle}$ ואכן:

$$\langle A,B\rangle = tr(AB^*) = tr(A\overline{B}^T) = tr(A\overline{B}^T)^T$$

תזכורת:
1. $trA = trA^T$
2. $tr(AB) = tr(BA)$

$$= tr(\overline{B}A^T) = \overline{tr(B\overline{A}^T)} = \overline{tr(BA^*)} = \overline{\langle B,A\rangle}$$

שאר התכונות נסו להראות בעצמכם..

3 דוג' למ"פ של פולינומים $V=\mathbb{R}[x]$

זו המ"פ הסטנדרטית של פולינומית ← $\langle f,g\rangle = \int_0^1 fg\,dx$

נראה לדוג' את תכונת החיוביות: $\langle f,f\rangle = \int_0^1 f^2\,dx \geq 0$

כי f^2 תמיד חיובית

שאר התכונות ניתן להראות לפי תכונות הלינאריות של אינטג' וכו'

תרגיל:

יהי V מ"ו עם מ"פ

יהי $u\in V$ כך שלכל $v\in V$ מתקיים $\langle u,v\rangle=0$.

תרגיל:

יהי V מ"ו עם מ"פ

יהי $u\in V$ כך שלכל $v\in V$ מתקיים $\langle u,v\rangle=0$.

צ"ל $u=0$

הוכחה:

מתקיים לכל $v\in V$ כי $\langle u,v\rangle=0$ (ובפרט עבור u עצמו)

$\langle u,u\rangle=0$ ולכן עפ"י תכונה $\underline{1}$ של מ"פ $u=0$ ∎ מש"ל

תרגיל:

מרחב מ"פ

יהי ממ"פ V, ממימד n ויהיו $v_1,\dots,v_n\in V$

נגדיר מטריצה A לפי: $a_{ij}=\langle v_i,v_j\rangle$

צ"ל $v_1,\dots,v_n$ ת"ל $\iff |A|=0$

הוכחה: ($\Leftarrow$) נניח $v_1,\dots,v_n$ ת"ל ונראה $|A|=0$.

$$A=\begin{pmatrix} \langle v_1,v_1\rangle & \langle v_1,v_2\rangle & \cdots & \langle v_1,v_n\rangle \\ \langle v_2,v_1\rangle & \langle v_2,v_2\rangle & \cdots & \langle v_2,v_n\rangle \\ \vdots & & & \\ \langle v_n,v_1\rangle & \cdots & \cdots & \langle v_n,v_n\rangle \end{pmatrix}$$

נניח בה"כ v_n תלוי בשאר, ז"א $\exists\, \alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}:\ v_n=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i v_i$

ולכן $\langle v_n,v_1\rangle=\left\langle \sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\,,\,v_1\right\rangle \underset{\text{I}}{=} \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\langle v_i,v_1\rangle$

תכונה 3

לינאריות ברכיב הראשון

ובאותו אופן נקבל שלכל v_j מתקיים

$$\langle v_n,v_j\rangle=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\langle v_i,v_j\rangle$$

ולכן המטריצה A היא

__כס״ג__

$$A=\begin{pmatrix} \langle v_1,v_1\rangle & \cdots & \langle v_1,v_n\rangle \\ \vdots & & \\ \langle v_{n-1},v_1\rangle & \cdots & \langle v_{n-1},v_n\rangle \\ \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\langle v_i,v_1\rangle & \cdots & \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\langle v_i,v_n\rangle \end{pmatrix}$$

אז השורה האחרונה היא צ״ל של כל השורות שמעליה ולכן $|A|=0$.

$\Leftarrow$ נסו בבית

תרגיל:

תהי $T : V \to V$ הע"ל המקיימת: לכל $v \in V$, $< v, T(v) >= 0$. הוכיחו/הפריכו: $T = 0$.

פתרון:

הפרכה: נקח $V = \mathbb{R}^2$, $T(a,b) = (b,-a)$.

נראה שזוהי - העתקה מקיימת את תנאי השאלה לכל $v \in V$

$<v, T(v)> = <\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}> = ab - ba = 0$ ✓

נסמן $v=(a,b)$

[illegible]

העתקה T

ולסיום ש-T אינה העתקת האפס

למשל $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,-1) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

תרגיל:

תהי $T:V\to V$ הע"ל המקיימת: לכל $v,u\in V$, $< u,T(v) >= 0$. הוכיחו/הפריכו: $T=0$.

פתרון:

הוכחה: נקח $u=T(v)$. נקבל ש $T(v)=0$.

$\langle Tv,Tv\rangle = 0$

$Tv=0$

אי שליליות מ"פ

בהצלחה!!!