לינארית 1 (88112), סמסטר קיץ תשעה, מועד ב'

25 באוגוסט 2020

1. משפט ההגדרה מההרצאה.

2. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. נסמן $W_1 = N(A-I), W_2 = N(A+I)$

(א) הוכיחו כי $W_1 + W_2 \subseteq N\left((A-I)(A+I)\right)$

פתרון: נראה כי $W_1, W_2 \subseteq N\left((A-I)(A+I)\right)$ ולכן גם הסכום שלהם.

W_1: יהא $v \in W_1$ אזי $(A-I)\,v = 0$ ומכיוון ש $A+I, A-I$ מתחלפות (כלומר $(A+I)\,(A-I) = (A-I)\,(A+I)$) נקבל כי

$$(A-I)(A+I)v = (A+I)(A-I)v = (A+I)\,0 = 0$$

ולכן $v \in N\left((A-I)(A+I)\right)$

W_2: יהא $v \in W_2$ אזי $(A+I)\,v = 0$ ולכן $(A-I)(A+I)v = (A-I)0 = 0$ ולכן $v \in N\left((A-I)(A+I)\right)$

(ב) נניח בנוסף $\mathbb{R}^n = W_1 + W_2$ -

i. הוכיחו כי $A^2 = I$.

פתרון: מסעיף קודם נקבל כי

$$\mathbb{R}^n = W_1 + W_2 \subseteq N\left((A-I)(A+I)\right) \subseteq \mathbb{R}^n$$

ולכן $N\left((A-I)(A+I)\right) = \mathbb{R}^n$ ולכן $(A-I)(A+I) = 0$. מכיוון ש $(A-I)(A+I) = A^2 - I$ נקבל ש $A^2 - I = 0$ ולכן $A^2 = I$ כנדרש.

ii. הוכיחו כי $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^n$

פתרון: נותר להוכיח כי $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. יהא $v \in W_1 \cap W_2$ ונראה כי $v = 0$. אכן מהגדרת החיתוך ותתי המרחבים נקבל כי $(A+I)\,v = 0 = (A-I)\,v$ ולכן $Av = v$ וגם $Av = -v$ ולכן $v = -v$ ולכן $2v = 0$ ומכאן ש $v = 0$ כנדרש.

3. יהא V מ"ו. ותהא $T : V \to V$ ה"ל כך ש $\mathrm{Im}T \cap \ker T = \{0\}$. הוכיחו שלכל $v \in V$ קיים $w \in \mathrm{Im}T$ כך ש $Tv = Tw$

פתרון: נחשב מימדים, לפי משפט המימדים ומשפט הדרגה

$$\dim\left(\mathrm{Im}T + \ker T\right) = \dim \mathrm{Im}T + \dim\ker T - \dim \mathrm{Im}T \cap \ker T = \dim V - 0$$

ולכן, מכיוון ש $\mathrm{Im}T + \ker T \subseteq V$ נקבל ש $\mathrm{Im}T + \ker T = V$ (הכלה חד-כיוונית ושיוויון מימדים). ואז: יהא v ב V אזי קיימים $w \in \mathrm{Im}T$ ו $u \in \ker T$ כך ש $v = w + u$ ולכן

$$Tv = T\,(w+u) = Tw + Tu = Tw + 0 = Tw$$

כנדרש.

4. נתונים תתי מרחבים של $\mathbb{R}_3[x]$:

$$W_1 = \left\{ p(x) \mid \begin{array}{c} p(1) + 2\cdot p(0) = 0 \\ p(-1) + 2\cdot p(1) = 0 \end{array} \right\}$$
$$W_2 = \mathrm{span}\left\{1+x, x+x^3, 1-x^3\right\}$$

(א) מצאו בסיס ומימד של W_1

פתרון: נשתמש ב $S=\{1,x,x^2,x^3\}$ הבסיס הסטנדרטי בחישובים.

$$[W_1]_S=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\mid \begin{array}{c}a+b+c+d+2\cdot a=0\\ a-b+c-d+2\cdot(a+b+c+d)=0\end{array}\right\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\mid \begin{array}{c}3a+b+c+d=0\\ 3a+b+3c+d=0\end{array}\right\}$$

נפתור את המערכת

$$\begin{pmatrix}3&1&1&1\\3&1&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&1&1&1\\0&0&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

ולכן אוסף הפתרונות הוא

$$\left\{\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}s\\t\\0\\s\end{pmatrix}\mid s,t\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ו $\left\{\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של $[W_1]_S$ ולכן $\{-\frac{1}{3}+x,-\frac{1}{3}+x^3\}$ בסיס של W_1 ומימדו $\dim W_1=2$

(ב) מצאו בסיס ומימד של W_2

פתרון: נשתמש ב $S=\{1,x,x^2,x^3\}$ הבסיס הסטנדרטי בחישובים.

$$[W_2]_S=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

נדרג לראות מי מהם בת"ל

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

יש איברים מובילים בעמודות $1,2$ ולכן הפולינום הראשון והשני $\{1+x,x+x^3\}$ מהווים בסיס ל W_2. ומימדו $\dim W_2=2$

(ג) מצאו בסיס ומימד של W_1+W_2

פתרון: נשתמש ב $S=\{1,x,x^2,x^3\}$ הבסיס הסטנדרטי בחישובים.

$$[W_1]_S+[W_2]_S=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

נדרג לראות מי מהם בת"ל ונצמצם כך לבסיס

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס לסכום $[W_1+W_2]_S$ ולכן $\{1+x, x+x^3, -\frac{1}{3}+x\}$ בסיס של W_1+W_2 ו
$\dim W_1+W_2=3$

(ד) מצאו בסיס ומימד של $W_1 \cap W_2$

פתרון: נשתמש ב $S=\{1,x,x^2,x^3\}$ הבסיס הסטנדרטי בחישובים. לפי משפט המימדים

$$\dim W_1 \cap W_2 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 + W_2 = 2+2-3 = 1$$

את החיתוך אפשר למצוא ע"י העברת W_2 למשוואות ואז מציאת החיתוך ע"י פתירת המערכת המורכבת מהמשוואות של W_1 ביחד עם המשוואות של W_2.

לחילופין למצוא פולינום שונה מפולינום האפס שנמצא ב $W_1 \cap W_2$ ומכיוון שהמימד $\dim W_1 \cap W_2 = 1$ הוא יהיה בסיס. למשל

$$W_2 \ni (1+x)-(x+x^3) = 1-x^3 = \left(-\frac{1}{3}+x\right) - \left(-\frac{1}{3}+x^3\right) \in W_2$$

ולכן $1-x^3 \in W_1 \cap W_2$ ולכן $\{1-x^3\}$ בסיס ל $W_1 \cap W_2$.

.5

(א) תהא $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y \\ \alpha x+\beta y \end{pmatrix}$ ומקיימת כי $\text{Im}T = \ker T$. מצאו את ערכי α, β

פתרון: לכל $v \in \mathbb{R}^2$ מתקיים כי $Tv \in \text{Im}T$ ובגלל ש $\text{Im}T = \ker T$ נקבל כי $T^2v = T(Tv) = 0$ ומכאן ש $T^2 = 0$. נסמן $S=\{e_1,e_2\}$ ואז

$$0 = [0]_S^S = [T^2]_S^S = [TT]_S^S = [T]_S^S[T]_S^S$$

כלומר $\left([T]_S^S\right)^2 = 0$ נחשב ישירות מהגדרה

$$[T]_S^S = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{pmatrix} 4-3\alpha & -6-3\beta \\ 2\alpha+\alpha\beta & -3\alpha+\beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ומיקום $1,1$ נקבל כי $4-3\alpha=0$ ולכן $\alpha=\frac{4}{3}$ וממיקום $1,2$ נקבל כי $-6-3\beta=0$ ולכן $\beta=-2$(בודקים ורואים שערכים אלו גם מקיימים את השיוויון במיקום $2,1$ ו $2,2$).

דרך נוספת: מהנתון כי $\text{Im}T = \ker T$ נקבל כי $\dim \ker T = \dim \text{Im}T$ וממשפט הדרגה נקבל כי $2\dim \text{Im}T = \dim \text{Im}T +$ $\dim \ker T = \dim \mathbb{R}^2 = 2$ ולכן $\dim \text{Im}T = 1$ ולכן

$$\text{rank}[T]_S^S = \text{rank}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = 1$$

זה גורר כי העמודות ת"ל. ולכן אחד כפולה של השני ומכיוון שהעמודה הראשונה אינה אפס אז השניה כפולה של הראשונה ולכן הכפולה חייבת להיות $-\frac{3}{2}$ לפי המיקום העליון, כלומר

$$\left(-\frac{3}{2}\right)\begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \beta \end{pmatrix}$$

ולכן $\beta = -\frac{3}{2}\alpha$ כלומר $[T]_S^S = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \alpha & -\frac{3}{2}\alpha \end{pmatrix}$ ומכיוון ש $\mathrm{Im}T = \ker T$ ו $\begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$ בתמונה של T נקבל כי $\begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$ גם בגרעין ולכן

$$\begin{pmatrix} 4-3\alpha \\ 2\alpha - \frac{3}{2}\alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \alpha & -\frac{3}{2}\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ומהמיקום העליון נקבל $4-3\alpha = 0$ ולכן $\alpha = \frac{4}{3}$ והמיקום התחתון נקבל $\alpha\left(2-\frac{3}{2}\alpha\right) = 0$ ו $\alpha = 0$ לא אפשרי כי לא מקיים את המשוואה מהמיקום העליון ולכן גם מפה נסיק $\alpha = \frac{4}{3}$ ואז $\beta = -\frac{3}{2}\alpha = -2$.
דרך נוספת: ניתוח ישיר של השיוויון $\mathrm{Im}T = \ker T$.

(ב) תהא $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ נניח כי $\ker(I+T) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ וגם $\ker(I-T) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$. מצאו

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = ?$$

פתרון:

עבור $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ מתקיים $v_1 \in \ker(I+T)$ ולכן $0 = (I+T)v_1 = Iv_1 + Tv_1 = v_1 + Tv_1$ ולכן $Tv_1 = -v_1$.

באופן דומה, נגדיר $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ואז $v_2, v_3 \in \ker(I-T)$ ולכן $(I-T)v_2 = 0 = (I-T)v_3$ ולכן $v_2 = Tv_2, v_3 = Tv_3$.

קיבלנו ש $Tv_1 = -v_1, Tv_2 = v_2, Tv_3 = v_3$ נראה כי $\{v_1, v_2, v_3\}$ פורשות את $\mathbb{R}^3$ (ולכן לפי השלישי חינם בסיס ל $\mathbb{R}^3$) ואז לפי משפט ההגדרה קיימת T יחידה המקיימת $Tv_1 = -v_1, Tv_2 = v_2, Tv_3 = v_3$ ונמצא אותה מפורשות.

נעשה חישוב משולב: יהא $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ונראה כי הוא צ"ל של v_1, v_2, v_3 נפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ -2 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 2 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 5 & 1 & b+2a \\ 0 & -2 & 2 & c-a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 5 & 1 & b+2a \\ 0 & 0 & 2\frac{2}{5} & c-a+\frac{2}{5}(b+2a) \end{array}\right)$$

הגענו לצורה מדורגת ללא שורת סתירה ולכן $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ הוא אכן צ"ל של v_1, v_2, v_3. נמשיך לדרג למצוא את מקדמי הצירוף

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 5 & 1 & b+2a \\ 0 & 0 & 2\frac{2}{5} & c-a+\frac{2}{5}(b+2a) \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{b+2a}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12}\left(c-a+\frac{2}{5}(b+2a)\right) \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b+2a}{5}-\frac{1}{5}\frac{5}{12}\left(c-a+\frac{2}{5}\left(b+2a\right)\right) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12}\left(c-a+\frac{2}{5}\left(b+2a\right)\right) \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a-2\left(\frac{b+2a}{5}-\frac{1}{5}\frac{5}{12}\left(c-a+\frac{2}{5}\left(b+2a\right)\right)\right) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b+2a}{5}-\frac{1}{5}\frac{5}{12}\left(c-a+\frac{2}{5}\left(b+2a\right)\right) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12}\left(c-a+\frac{2}{5}\left(b+2a\right)\right) \end{array}\right)$$

נסמן $\alpha_1 = a-2\left(\frac{b+2a}{5}-\frac{1}{5}\frac{5}{12}\left(c-a+\frac{2}{5}\left(b+2a\right)\right)\right)$ ו $\alpha_2 = \frac{b+2a}{5}-\frac{1}{12}\left(c-a+\frac{2}{5}\left(b+2a\right)\right)$ ו $\alpha_3 = \frac{5}{12}\left(c-a+\frac{2}{5}\left(b+2a\right)\right)$ ואז

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$

ואז

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= T\left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3\right) \\ &= \alpha_1 T v_1 + \alpha_2 T v_2 + \alpha_3 T v_3 \\ &= -\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \end{aligned}$$

.6

(א) מצאו לאילו ערכי a, אם בכלל, למערכת המשוואות הבאה מעל $\mathbb{R}$ יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות, אין פתרון. המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ a & a-1 & -1 & a+3 \\ 1 & a-1 & a-3 & 7 \end{array}\right)$$

(ב) תהא $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ כך ש $|A| = 2$, חשבו את $\left|3A \cdot A^t \cdot A^{-1} \cdot \text{adj}A\right|$

פתרון: לפי כפליות הדטרמיננטה ותכונות של adj ודטרמניטטה נקבל כי

$$\begin{aligned} \left|3A \cdot A^t \cdot A^{-1} \cdot \text{adj}A\right| &= 3^3\left|A\right| \cdot \left|A^t\right| \cdot \left|A^{-1}\right| \cdot \left|\text{adj}A\right| \\ &= 3^3\left|A\right| \cdot \left|A\right| \cdot \frac{1}{\left|A\right|} \cdot \left|A\right|^{3-1} \\ &= 27 \cdot \left|A\right|^3 = 27 \cdot 8 \end{aligned}$$