שיעורי בית מספר 1

1. מצאו ע"ע ומ"ע של $A=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\2&0&-2&0\\0&2&0&-2\end{pmatrix}$. קבעו האם היא לכסינה ובמידה וכן מצאו מטריצה מלכסנת וצורה אלכסונית שהיא דומה לה.פתרון : חישוב הפ"א

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&0&1&0\\0&\lambda-1&0&1\\-2&0&\lambda+2&0\\0&-2&0&\lambda+2\end{pmatrix}\right|=\begin{pmatrix}\lambda+1&0&-\lambda-1&0\\0&\lambda+1&0&-\lambda-1\\-2&0&\lambda+2&0\\0&-2&0&\lambda+2\end{pmatrix}=$$

$$(\lambda{+}1)^2\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-2&0&\lambda+2&0\\0&-2&0&\lambda+2\end{pmatrix}=(\lambda{+}1)^2\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&0&\lambda&0\\0&-2&0&\lambda\end{pmatrix}=(\lambda{+}1)^2\lambda^2$$

מ"ע:

$$V_0=span\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\}$$

$$V_{-1}=span\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}\}$$

לכן יש בסיס של ו"ע ואם נגדיר $P=\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&-1&0&1\\1&0&2&0\\0&1&0&2\end{pmatrix}$ היא תהיה מטריצה מלכסנת ו $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&&\\&0&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}$

2. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ דומות. הוכיחו כי

(א) $\det A=\det B$

(ב) $tr(A)=tr(B)$

(ג) המטריצות A^t,B^t דומות.

פתרון : לפי נתון, קיימת P הפיכה כך ש $P^{-1}AP=B$ ואז

(א) $\det B=\det P^{-1}AP=\det P^{-1}\cdot\det A\cdot\det P=\det A$.

(ב) נשתמש בכך ש $tr(M_1M_2)=tr(M_2M_1)$ ונקבל כי $tr(B)=tr(P^{-1}AP)=$ $tr(APP^{-1})=tr(A)$

(ג) נשלף את שני הצדדים ונקבל $B^t=\left[P^{-1}AP\right]^t=P^tA^tP^{-t}$ ולכן A^t דומה ל B^t ע"י המטריצה P^{-t}

3. ראיתם כי יחס דימיון מטריצות על $\mathbb{F}^{n\times n}$ הוא יחס שקילות. מצאו מטריצה $A\neq 0,I$ כך שבמחלקת השקילות שלה יש מטריצה אחת (כלומר ש A היא המטריצה היחידה שדומה לעצמה).

פתרון : נראה שכל מטריצה סקלארית αI היא דוגמא לשאלה. אכן, לכל P הפיכה מתקיים כי $P^{-1}\cdot\alpha I\cdot P=\alpha P^{-1}\cdot P=\alpha I$ לכן αI היחידה שדומה לעצמה.

4. הוכיחו כי כל מטריצה משולשית עליונה דומה למטריצה משולשית תחתונה (וגם להיפך).

הדרכה: העיזרו ב $P=\begin{pmatrix} & & 1\\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$

פתרון : תהא $U\in\mathbb{F}^{n\times n}$ משולשית עליונה. נשים לב כי $P=P^{-1}$ וראה כי PUP משולשית תחתונה. אכן לכל $i<j$ מתקיים כי

$$\begin{aligned}[PUP]_{i,j}&=\sum_{k=1}^{n}(PU)_{i,k}P_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}P_{i,s}U_{s,k}P_{k,j}\\&=P_{i,n+1-i}U_{n+1-i,n+1-j}P_{n+1-j,j}=U_{n+1-i,n+1-j}=0\end{aligned}$$

.5

(א) יהיו A,B דומות. ראינו שיש להם אותו פ"א ולכן אותם ע"ע. הוכיחו כי לכל ע"ע λ של שתיהם מתקיים כי הר"ג של λ כע"ע של A שווה לר"ג של λ כע"ע של B. כלומר הראו כי $\dim N(A-\lambda I)=\dim N((B-\lambda I))$

פתרון : נחשב לפי משפט הדרגה:

$$\dim N(A-\lambda I)=\dim N(P^{-1}BP-\lambda I)=\dim N(P^{-1}(B-\lambda I)P)=n-rank(P^{-1}(B-\lambda I)P)=n-rank((B-\lambda I))$$

.

(ב) קבע מי מהמטריצות הבאות דומות

$$A_1=\begin{pmatrix}2&1&&&\\&2&1&&\\&&2&&\\&&&5&\\&&&&5\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}2&&&&\\&2&1&&\\&&2&&\\&&&5&\\&&&&5\end{pmatrix},,A_3=\begin{pmatrix}2&&&&\\&2&&&\\&&2&1&\\&&&5&\\&&&&5\end{pmatrix},A_4=\begin{pmatrix}2&&&&\\&2&&&\\&&2&&\\&&&5&\\&&&&5\end{pmatrix},A_5=\begin{pmatrix}2&&&&\\&2&1&&\\&&2&&\\&&&5&1\\&&&&5\end{pmatrix}$$

פתרון : מחישוב ישיר רואים כי

i	$\dim N(A_i-2I)$	$\dim N(A_i-5I)$
1	1	2
2	2	2
3	3	2
4	3	2
5	2	1

לפי סעיף קודם A_1, A_2, A_3, A_5 לא דומות אחת לשניה כי הר"ג לא נשמרים.
בנוסף A_3, A_4 לכסינות כי הפ"א מל"ל (הוא $(x-2)^3 (x-5)^2$) ולכל ע"ע הר"א שווה לר"ג . והם דומות לאותה מטריצה אלכסונית (שעל אלכסונה $2,2,2,5,5$)

6. תהא $A \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ עם דרגה = 5. נתון כי $rank(A-3I) = 5$. עוד נתון כי ל A קיים ע"ע ששוה ל - 5 . הוכיחו כי A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ ומצא את האלכסונית ש A דומה לה.
פתרון : ידוע כי $rank(A) + \dim N(A) = 9$ ולכן $\dim N(A) = 4$. כלומר הר"ג של ע"ע = 0 הוא 4 ולכן הר"א שלו לפחות 4. משיקולים דומים הר"ג של ע"ע = 3 הוא 4 ולכן הר"א שלו לפחות 4. נתון שיש ע"ע =5 ולכן הר"א שלו לפחות 1.
כיוון שסכום ר"א של הע"ע הוא 9 אזי נקבל כי
ע"ע =0 הוא עם בדיוק ר"א (ששוה לר"ג) 4
ע"ע =3 הוא עם בדיוק ר"א (ששוה לר"ג) 4
ע"ע =5 הוא עם בדיוק ר"א (ששוה לר"ג) 1
לפי משפט A לכסינה והמטריצה האלכסונית הדומה לה היא
$$D = \begin{pmatrix} 0I_4 & & \\ & 3I_3 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$
כאשר I_4 היא מטריצת היחידה מגודל 4×4.

7. תהא $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ שדומה למטריצה האלכסונית $D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & i & \\ & & & -i \end{pmatrix}$. חשבו את A^{100}. הדרכה: היעזרו בכך ש A^{100} דומה ל D^{100} (ע"י איזה מטריצה?)
פתרון : קיימת P הפיכה כך ש $P^{-1}AP = D$ או בהעברת אגפים $A = PDP^{-1}$ ולכן
$$A^{100} = \left[PDP^{-1}\right]^{100} = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD^{100}P^{-1} = PIP^{-1} = I$$
.

8. נגדיר סדרת מספרים בצורה רקורסיבית:
$$\begin{aligned} a_{-1} &= -1 \\ a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ \forall n \geq 2 \;\; a_n &= -2a_{n-1} + a_{n-2} + 2a_{n-3} \end{aligned}$$

(א) הגדירו A המקיימת $\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$ לכל $n \geq 2$.
פתרון : לפי הגדרה
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

תקיים את השיוון הדרוש.

(ב) לכסנו את A כדי למצוא ביטוי מפורש ל a_n (עבור $n\geq 2$). הדרכה: שימו לב כי $\begin{pmatrix} a_n\\ a_{n-1}\\ a_{n-2}\end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix} a_1\\ a_0\\ a_{-1}\end{pmatrix}$ לכל $n\geq 2$.

פתרון : נמצא פולינום אופיני

$$p_A(x)=\left|\begin{pmatrix} x+2 & -1 & -2\\ -1 & x & 0\\ 0 & -1 & x\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix} x-1 & -1 & -2\\ x-1 & x & 0\\ x-1 & -1 & x\end{pmatrix}\right|=(x-1)\left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2\\ 1 & x & 0\\ 1 & -1 & x\end{pmatrix}\right|=$$

$$=(x-1)\left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2\\ 0 & x+1 & 2\\ 0 & 0 & x-2\end{pmatrix}\right|=(x-1)(x+1)(x+2)$$

ולכן $\{-1,1,-2\}$ הם הע"ע של A. ו"ע:

עבור $\lambda=-1$

$$A+I=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{-1}=\left\{\begin{pmatrix} t\\ -t\\ t\end{pmatrix}\,:\,t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

עבור $\lambda=1$

$$A-I=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ -3 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{1}=\left\{\begin{pmatrix} t\\ t\\ t\end{pmatrix}\,:\,t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

עבור $\lambda=-2$

$$A+2I=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{-2}=\left\{\begin{pmatrix} 4t\\ -2t\\ t\end{pmatrix}\,:\,t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix} 4\\ -2\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן אם נגדיר $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ נקבל כי $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ולכן $A = PDP^{-1}$ ולכן $A^n = PD^nP^{-1}$ לכל n טבעי

ולכן

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \\ a_{-1} \end{pmatrix} = PD^{n-1}P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{n-1} \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -9\left(-1\right)^{n-1} \\ 4\left(-2\right)^{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 - 9\left(-1\right)^{n-1} + 16\left(-2\right)^{n-1} \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

ולכן

$$a_n = \frac{1}{6}\left(-1 - 9\left(-1\right)^{n-1} + 16\left(-2\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{6}\left(-1 + 9\left(-1\right)^{n} + \left(-2\right)^{n+3}\right)$$

לכל $n \geq 2$.