תרגול 1 – אנליזה מודרנית

תזכורת: תהי X קבוצה כלשהי. $S\subseteq P(X)$ הינה σ-אלגברה של קבוצות ב X אם מתקיימים התנאים הבאים:

i. $A\in S\Rightarrow A^c\in S$.

ii. $X\in S$.

iii. $\{E_n\}\in S\Rightarrow\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in S$

ראיתם בהרצאה כי חיתוך של סיגמא אלגברות מעל קבוצה X הינו סיגמא אלגברה על X . האם האם הדבר נכון לגבי איחוד?

1. מצא דוגמא לקבוצה X ושתי סיגמא אלגברות S_1 ו S_2 מעל X , כך ש $S_1\bigcup S_2$ אינה סיגמא אלגברה.

פתרון: ניקח $X=\{1,2,3\}$, $S_1=\{\{1\},\{2,3\},\varnothing,\{1,2,3\}\}$ ו $S_2=\{\{1,2\},\{3\},\varnothing,\{1,2,3\}\}$. קל לראות כי S_1 ו S_2 הינן סיגמא אלגברות ואילו $S_1\bigcup S_2=\{\{1,2\},\{3,\},\{1\},\{2,3\},\varnothing,\{1,2,3,4\}\}$ אינה סיגמא אלגברה שכן $\{1,2\}\cap\{2,3\}\notin S_1\cup S_2$.

ראינו כרגע כי איחוד של סיגמא אלגברות על X אינו בהכרח סיגמא אלגברה על X . מה קורה אם הסיגמא אלגברות מוכלות אחת בשנייה? האם איחוד שלהן יהיה סיגמא אלגברה?

2. נניח כי $S_1\subseteq S_2\subseteq\cdots$ הינן סיגמא אלגברות המכילות תת קבוצות של X . האם $\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$ הינה סיגמא אלגברה? אם לא תן דוגמא נגדית.

פתרון: נבחר את X להיות כל הסדרות המקבלות 0 או 1 כלומר $X=\{\{x_i\}:x_i=0\vee x_i=1\}$. נגדיר את S_1 להיות הסיגמא אלגברה הנוצרת מהקבוצה $A_1=\{\{x_i\}:\{x_i\}\in X,x_1=1\}$. נגדיר את S_2 להיות הסיגמא אלגברה הנוצרת מ A_1 ו $A_2=\{\{x_i\}:\{x_i\}\in X,x_2=1\}$. באופן איטרטיבי נגדיר את S_{n+1} להיות הסיגמא אלגברה הנוצרת מכל הקבוצות ב S_n והקבוצה $A_{n+1}=\{\{x_i\}:\{x_i\}\in X,x_{n+1}=1\}$. אינטואיטיבית ניתן להבין זאת כך: בסיגמא אלגברה S_n ניתן להבדיל בין ה n איברים הראשונים של הסדרות ב X . ברור כי $S_1\subseteq S_2\subseteq\cdots$ שכן כך בנינו אותן. נגדיר $S=\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$ ונראה כי $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\notin S$. נניח בשלילה כי $A\in S$, אזי בהכרח

כי $A\in S_n$ לאיזשהו $n\in\mathbb{N}$, אבל $A=\{(1,1,\dots)\}$, כלומר A הינה קבוצה בעלת איבר אחד ואילו ב S_n כל הקבוצות הינן אינסופיות ולכן סתירה. מכאן ש S איננה סיגמא אלגברה.

תזכורת: תהי X קבוצה ותהי $A\subseteq P(X)$ משפחה של תתי קבוצות ב X . הסיגמא אלגברה הנוצרת ע"י A הינה הסיגמה אלגברה המינימלית המכילה את A ומסומנת ב $\sigma(A)$. כלומר, אם נסמן את אוסף כל הסיגמא אלגברות המכילות את A ב $\mathbb{S}$ אזי

$$.\sigma(A)=\bigcap_{S_i\in\mathbb{S}} S_i$$

תזכורת: יהי X מרחב טופולוגי עם טופולוגיה T . אזי הסיגמא אלגברה בורל על X הינה $\sigma(T)$.

3. הראו כי הסיגמא אלגברה הנוצרת ע"י הנקודונים ב $\mathbb{R}$ מוכלת ממש בסיגמא אלגברה בורל ב $\mathbb{R}$.

פתרון: נגדיר סיגמא אלגברה חדשה

$$S=\{A\subseteq\mathbb{R} \mid A \text{ is countable or } A^c \text{ is countable}\}$$

טענה: S הינה סיגמא אלגברה.

הוכחה: נבדוק תכונות

i. $\varnothing\in S\Rightarrow\mathbb{R}\in S$

ii. $A\in S\Rightarrow A \text{ is countable } \vee A^c \text{ is countable}\Rightarrow A^c\in S$

iii. נניח כי $\{A_n\}\in S$. אזי יתכנו 2 מקרים:

א. A_n בן מנייה לכל $n\in\mathbb{N}$. במקרה כזה ברור כי $\bigcup_n A_n$ הינה קבוצה בת מנייה ו $.\bigcup_n A_n\in S$

ב. אחת מהקבוצות A_n אינה בת מנייה נסמן אותה ב A_{n_0} . במקרה כזה $\left(\bigcup_n A_n\right)^c=\bigcap_n A_n^{\,c}=\bigcap_n A_n^{\,c}\cap A_{n_0}^{\,c}$ ולכן בת מנייה ולכן $.\bigcup_n A_n\in S$

מכאן קיבלנו ש S הינה סיגמא אלגברה.

כעת , נשים לב כי S מכילה את כל הנקודונים ב $\mathbb{R}$ ומכאן ש $\sigma(\{x\mid x\in\mathbb{R}\})\subseteq S$.ברור כי $S\subset\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ וסיימנו.

תזכורת: תהי X קבוצה ו S סיגמא אלגברה מעל S. מידה μ על S הינה פונקציה $\mu: S \to [0,\infty]$ המקיימת את התכונות הבאות:

i. $\mu(\varnothing)=0$

ii. אם A_i קבוצות זרות ב S אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$. (סיגמא אדיטיביות)

לפעמים יש לנו מידה על קבוצה X עם σ - אלגברה כלשהי ואנו רוצים להסתכל רק על תתי קבוצות של $A \subseteq X$. לדוגמא, לצמצם את מידת הספירה על $\mathbb{R}$ שראיתם בהרצאה על $\mathbb{Z}$. על מנת לעשות זאת נוכיח שתי טענות.

4. תהי S סיגמא אלגברה על X ותהי B קבוצה מדידה ב S. הוכיחו כי $S_B=\{E \mid E=A\cap B, A \text{ is S measurable}\}$ הינה סיגמא אלגברה על B.

פתרון: נבדוק אם התנאים מתקיימים.

i. $X\in S \Rightarrow X\cap B=B\in S$.

ii. $E\in B \Rightarrow \exists A\in S \wedge E=A\cap B \Rightarrow A^c\in S \wedge A^c\cap B=B-E\in S_B$.

iii. $\{E_n\}\in S_B \Rightarrow \exists\{A_n\}\in S \wedge A_n\cap B=E_n \Rightarrow \left(\bigcup A_n\right)\cap B\in S_B$

$\Rightarrow \bigcup\left(A_n\cap B\right)=\bigcup E_n\in S_B$

ומכאן ש S_B הינה סיגמא אלגברה.

5. הוכח כי אם (X,S,μ) הינו ממ"ח, $B\in S$, ונגדיר $\nu(A)=\mu(A\cap B)$ עבור $A\in S$ אזי ν הינה מידה.

פתרון: נבדוק את התכונות הנדרשות ממידה.

i. $\nu(\varnothing)=\mu(\varnothing\cap B)=\mu(\varnothing)=0$

ii. $\nu(A)=\mu(A\cap B)\geq 0$

iii. נניח כי $\{E_n\}$ סדרה של קבוצות זרות ב S, אזי

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\mu\left(B\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\cap B)\right)$$

מכיוון ש E_n זרות נובע כי גם $B\cap E_n$ זרות ולכן, כיוון ש μ הינה מידה נקבל

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\cap B)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n\cap B)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(E_n).$$

6. יהי ה (X,S) מרחב מדיד ו μ הינה פונקצית קבוצות חיובית ואדיטיבית סופית וכך ש $\mu(\varnothing)=0$. נניח שאם A_n הינה סדרת קבוצות עולה אז מתקיים $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$. הראו כי μ הינה מידה.

פתרון: מספיק להראות שאם $\{E_n\}$ סדרה של קבוצות זרות אזי מתקיים $\mu\left(\bigcup_n E_n\right)=\sum_n \mu(E_n)$. נגדיר סדרה חדשה $F_n=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$. זוהי סדרה עולה , ומתוך האדיטיביות הסופית של μ נובע כי $\mu(F_n)=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)$. מתקיים גם ש $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$ ולכן

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(F_n)=\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i).$$

7. הוכח: כל קבוצה פתוחה $G\subseteq\mathbb{R}$ הינה איחוד בן מניה של קטעים זרים פתוחים ב $\mathbb{R}$.

פתרון:

לכל $x\in G$, יהי I_x הקטע הפתוח הגדול ביותר ב $\mathbb{R}$ כך שמתקיים $x\in I_x\subseteq G$. נניח כי $x,y\in G$ וגם $I_x\cap I_y\neq\varnothing$ אזי $I_x\cup I_y$ הינו קטע פתוח וכן

$$I_y\subseteq I_x\cup I_y\subseteq G \qquad \text{וגם} \qquad I_x\subseteq I_x\cup I_y\subseteq G$$

מההגדרה של I_x ו I_y נובע ש $I_x=I_x\cup I_y$ וכן $I_y=I_x\cup I_y$ ולכן $I_y=I_x$. מכאן נובע כי I_x ו I_y הינם שווים או זרים, ולכן G הינו איחוד זר של קטעים פתוחים ב $\mathbb{R}$.

$$G=\bigcup_{I\in\mathcal{C}}I$$

כעת נראה כי $\mathcal{C}$ הינו אוסף בן מניה . נשים לב כי כל $I\in\mathcal{C}$ מכיל מספר ראציונאלי x_I .
נוכל לבנות מיפוי חח"ע ועל

$$\varphi:\mathcal{C}\to\{x_I : I\in\mathcal{C}\}$$

ע"י $\varphi(I)=x_I$ לכל $I\in\mathcal{C}$. כלומר, לכל $I\in\mathcal{C}$ נתאים את הראצינאלי שבחרנו ממנו.
כמובן ש $\{x_I : I\in\mathcal{C}\}\subseteq\mathbb{Q}$ ולכן הינה בת מניה ומכאן ש $\mathcal{C}$ בת מנייה.