פתרון תרגיל 5 – מופשטת 1 קיץ 2013

<u>שאלה 1</u>

<u>תזכורת</u>: נאמר שחבורה G היא מכפלה ישרה פנימית של ת"ח $X,Y\le G$ אם:

א. לכל $g\in G$ קיימים $x\in X, y\in Y$ יחידים כך ש- $g=xy$;

ב. $xy=yx$ לכל $x\in X, y\in Y$.

תהא G מכפלה ישרה פנימית של H_1,H_2 ותהא $N\lhd G$ תח"נ המקיימת $N\bigcap H_1=N\bigcap H_2=\{e\}$. הוכיחו: $N\subseteq Z(G)$.

<u>פתרון</u>

<u>טענת עזר</u>: יהיו $N,H\lhd G$ תח"נ המקיימות $N\bigcap H=\{e\}$. אזי כל איברי H מתחלפים עם כל איברי N.

<u>הוכחת טענת עזר</u>: קודם כל, הטענה נובעת ישירות ממשפט הפיצול. שנית, ניתן להוכיח זאת ישירות: נשים לב שהטענה שקולה לכך שלכל $n\in N, h\in H$ מתקיים $nhn^{-1}h^{-1}=\{e\}$. מתקיים $nhn^{-1}h^{-1}=n\left(hn^{-1}h^{-1}\right)$ ומכיוון ש- $N\lhd G$ מתקיים $hn^{-1}h^{-1}\in N$ ולכן $nhn^{-1}h^{-1}=n\left(hn^{-1}h^{-1}\right)\in N$. באותו אופן (מכיוון ש- H היא תח"נ) מתקיים $nhn^{-1}h^{-1}=\left(nhn^{-1}\right)h^{-1}\in H$. לכן $nhn^{-1}h^{-1}\in N\bigcap H$ והוכחנו הדרוש.

מש"ל טענת עזר

<u>בחזרה לתרגיל</u>

יהי $n\in N$ ונרצה להראות ש-$n\in Z(G)$, כלומר, לכל $g\in G$ מתקיים $ng=gn$ (או, באופן שקול, $ngn^{-1}g^{-1}=e$).

מכיוון ש-G היא מכפלה ישרה פנימית של H_1,H_2 קיימים (ויחידים) $h_1\in H_1, h_2\in H_2$ כך ש- $g=h_1h_2$.

מתקיים: $ngn^{-1}g^{-1}=nh_1h_2n^{-1}h_2^{-1}h_1^{-1}$. מכיוון שכל איברי H_1 מתחלפים עם כל איברי H_2, והם כולם מתחלפים עם כל איברי N מתקיים:
$ngn^{-1}g^{-1}=h_1nh_2n^{-1}h_2^{-1}h_1^{-1}=h_1h_2nn^{-1}h_2^{-1}h_1^{-1}=h_1h_2h_2^{-1}h_1^{-1}=\ldots=e$, כדרוש.

מש"ל

שאלה 2

א. נתונות שש חבורות מסדר 40. זהו אילו חבורות איזומורפיות זו לזו:
$\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$, $U_{10}\times\mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_{40}$

ב. מצאו איזומורפיזם מפורש מהחבורה $\mathbb{Z}_{15}\times\mathbb{Z}_2$ אל החבורה $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_{10}$.

פתרון

א. $\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_5\cong\mathbb{Z}_{40}$ שכן $(8,5)=1$. האקספוננט של חבורה זו הוא 40.

$U_{10}=\{1,3,7,9\}\cong\mathbb{Z}_4$ (בדקו ש U_{10} ציקלית) וכמו כן $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\cong\mathbb{Z}_{10}$ ולכן $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\cong\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{10}\cong U_{10}\times\mathbb{Z}_{10}$. האקספוננט של החבורה הזו הוא 20.

לבסוף האקספוננט של $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5$ הוא 10. לכן קיבלנו בסה"כ שלוש חבורות שאינן איזומורפיות.

דרך אחרת- מעבירים לצורה הקנונית שהיא יחידה עד כדי איזומורפיזם.

הצורה הקנונית הראשונה היא $\mathbb{Z}_{40}$, השניה היא $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{20}$. שימו לב: $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_4\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{20}$.

השלישית היא $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{10}$.

ב. נמצא שני איזומורפיזמים $\mathbb{Z}_{15}\times\mathbb{Z}_2\xrightarrow{h_1}\mathbb{Z}_{30}\xrightarrow{h_2}\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_{10}$ ואז האיזומורפיזם הדרוש הוא ההרכבה $h_2\circ h_1$. מתקיים: $h_1(x,y)=-7x+y$ שכן מתקיים $1=1\cdot 15+(-7)\cdot 2$. כמו כן, $h_2(z)=(z \bmod 3, z \bmod 10)$.

מש"ל

שאלה 3

האם קיימת חבורה אבלית G, כך ש- $\exp(G)=4$, $|G|=32$, ו- $[G:G^2]=4$?

<u>הערה</u>: הסימון G^2 בחבורה אבלית הוא למעשה (בכתיב חיבורי) $2G=\{2g:g\in G\}$.

פתרון

$\exp(G)=4$, $|G|=32$ ומכאן G איזומורפית ל- $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_4$ או ל- $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4$. מתקיים:

$$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_4\Big/2(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_4)\cong\mathbb{Z}_2\big/2\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4\big/2\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_4\big/2\mathbb{Z}_4\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$$

והסדר המתקבל הוא שמונה.

$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4 \big/ 2(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$ וסדר החבורה הוא 16. בכל מקרה לא מקבלים $\left[G:G^2\right]=4$ ולכן אין חבורה כזו.

שימו לב שמבלי לעבור למנה, יכולנו לחשב את הסדרים ישירות. למשל, במקרה הראשון: הסדר של החבורה $2(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_4)$ הוא 4, ולכן $[G:2G]=8$ בסתירה לנתון.

מש"ל

<u>שאלה 4</u>

א. כמה מחלקות צמידות יש בחבורה S_6?

ב. תהא $G=S_4$ הפועלת על הקבוצה $X=\{1,2,3,4\}$ ע"י $g*x=g(x)$. חשבו את המייצב של $x=2$. האם המייצב של $x=2$ הוא ת"ח נורמלית של G? נמקו.

<u>פתרון</u>

א. כפי שראינו מחלקות הצמידות ב-S_n הן קבוצות המכילות את כל התמורות בעלות אותו מבנה מחזורים. לכן מספיק לספור כמה מבני מחזורים יש. תשובה: 11.

ב. המייצב של $x=2$ הוא התמורות שלא מזיזות את 2, כלומר: $A=\{id,(13),(14),(34),(134),(143)\}$. המייצב אינו תת חבורה נורמלית שכן, למשל, $(12)(13)(12)=(23)\notin A$.

מש"ל

<u>שאלה 5</u>

א. חשבו את aba^{-1} עבור: (1) $a=(1\ 3\ 5)(1\ 2)$ ו- $b=(1\ 5\ 7\ 9)$.

(2) $a=(1\ 3\ 8)$ ו- $b=(1\ 8\ 3\ 9)$.

ב. מצאו גודל של מחלקת צמידות $[\beta]=\{g^{-1}\beta g:\quad g\in S_{15}\}$ של האיבר $\beta=(3,2,6,9)$ ואת סדר המייצב של β (תחת הצמדה).

ג. תהי $H\le S_9$ תת חבורה הנוצרת על ידי $(123)(789)$ ו-(345). נניח ש- H פועלת (הפעולה הטבעית) על $X=\{1,2,3,\dots,9\}$. כמה מסלולים יש לפעולה זו ומהו סדרם של מסלולים אלו?

פתרון

א.

(1) $aba^{-1}=\big(a(1)\,a(5)\,a(7)\,a(9)\big)=(2179)$;

(2) באותו האופן, $aba^{-1}=(3189)$.

ב. (הערה לגבי סימונים: $orb(a)=G*a$)

למעשה אנו מתבוננים בפעולה של S_{15} על עצמה ע"י הצמדה. גודל מסלול ההצמדה של β הוא מספר האיברים בחבורה אשר צמודים לה; משמע, מספר המחזורים מאורך 4. מתקיים: $|S_{15}*\beta|=|conj(\beta)|=\binom{15}{4}(4-1)!=8190$.

את סדר המייצב ניתן לחשב מהמשפט: $|G*x|=[G:Stb(x)]$. מקבלים:

$|Stb(\beta)|=\frac{15!}{8190}=159,667,200$.

<u>הערה</u>: שימו לב ש- $Stb(\beta)$ הוא המייצב של β ביחס לפעולת ההצמדה; כלומר, $Stb(\beta)=C_\beta$.

ג. קל לראות שקיימים שלושה מסלולים: האחד $\{1,2,3,4,5\}$ מגודל 5, השני $\{6\}$ מגודל 1 והשלישי $\{7,8,9\}$ מגודל 3. הסבר: מהגדרת H נובע שלכל $\sigma\in H$ $\sigma(6)=6$ לכן $orb(6)=\{6\}$. התמורה $(345)\in H$ מעבירה את 3 ל 4 ואת 4 ל5 ומכיוון שהמסלולים הם מחלקות שקילות של X $3,4,5\in orb(3)$. מכיוון שהתמורה $(123)(789)\in H$ נקבל ש גם $1,2\in orb(3)$. משיקולים דומים $7,8,9\in orb(7)$. לבסוף שימו לב שמהגדרת H אף תמורה ב H לא מעבירה איבר מ $\{1,2,3,4,5\}$ לאיבר בקבוצה $\{7,8,9\}$ (מדוע?). מכך נסיק שהמסלולים הינם כפי שצויינו.

מש"ל

<u>שאלה 6</u>

<u>תזכורת</u>: עבור $H\le G$ נגדיר את ה*מנרמל* (או ה*נורמליזטור*) של H ב- G:

$N(H):=\{g\in G: gH=Hg\}$.

הוכיחו:

א. $N(H)\le G$ ו- $H\lhd G \Leftrightarrow N(H)=G$;

ב. $H\lhd N(H)$;

ג. אם $H\lhd K\le G$ אזי $K\le N(H)$.

פתרון

א. $N(H)\le G$ **ו-** $H\lhd G \Leftrightarrow N(H)=G$**.**

נוכיח תחילה כי $N(H)\le G$. ברור ש-$N(H)$ אינה ריקה, שכן $1_G\in N(H)$. יהיו $a,b\in N(H)$. מתקיים: $(ab)H=a(bH)=a(Hb)=(aH)b=(Ha)b=H(ab)$ ולכן $ab\in N(H)$. כעת, יהי $a\in N(H)$. מתקיים: $(a^{-1})H=(aH)^{-1}=(Ha)^{-1}=H(a^{-1})$ ולכן $a^{-1}\in N(H)$.

נוכיח כעת את הטענה $H\lhd G \Leftrightarrow N(H)=G$. הכיוון הראשון טריוויאלי (שכן, אם $H\lhd G$ אזי $gH=Hg$ לכל $g\in G$). הכיוון השני טריוויאלי מהגדרת ת"ח נורמלית.

ב. $H\lhd N(H)$**.**

רואים מההגדרה כי $H\subseteq N(H)$ ולכן היא ת"ח. נותר להראות שהיא נורמלית.
קל לראות שלכל $a\in N(H)$ ולכל $h\in H$ מתקיים $aha^{-1}\in H$.

ג. אם $H\lhd K\le G$ **אזי** $K\le N(H)$**.**

מספיק להראות ש-K מוכלת ב-$N(H)$ (מדוע?). $H\lhd K$ ולכן <u>לכל</u> $k\in K$ מתקיים $kHk^{-1}=H$, ומהגדרת המנרמל רואים כי $k\in N(H)$. לכן, $K\subseteq N(H)$.

מש"ל

<u>שאלה 7</u>

השתמשו במשפט קיילי על מנת להציג את U_9 כתת חבורה של S_6.

פתרון

$U_9=\{1,2,4,5,7,8\}$. כעת, מכיון ש U_9 ציקלית מספיק להראות מה התמונה σ של היוצר 2 ב $S_{\{1,2,4,5,7,8\}}\cong S_6$. נעשה זאת לפי האלגוריתם בהוכחת משפט קיילי, שכן אז תמונות כל שאר האיברים יקבעו בשל הציקליות. כזכור 2

אמור להיות מועתק ל σ כאשר $\forall x\in U_9 \quad \sigma(x)=2\cdot x$ ו $2\cdot x$ כפל ב- U_9. נקבל $\sigma(1)=2,\quad \sigma(2)=4 \quad \sigma(4)=8 \quad \sigma(8)=7 \quad \sigma(7)=5$ לכן $\sigma=(1\,2\,4\,8\,7\,5)\in S_{\{1,2,4,5,7,8\}}$.

מש"ל