<u>פתרון מועד ב אלגברה מופשטת1   2010:</u>

<u>שאלה1</u>

א

1) $\left.\begin{array}{r} a\le 5 \\ 2\le b\le 5\end{array}\right\} \to 2\le \min\{a,b\}\le 5 \to a\ b\in X$

2) $Neutral:\ \boxed{e=5}$

3) $Associativity:\ \ a\cdot(b\cdot c)=\min\{a,b\cdot c\}=\min\{a,\min\{b,c\}\}=\min\{a,b,c\}=\min\{\min\{a,b\},c\}$
$=(a\cdot b)\cdot c$

זה מוכיח כי $(X,\ )$ מהווה מונואיד.

4) <u>קומוטטיביות</u> : $a\cdot b=\min\{a,b\}=\min\{b,a\}=b\cdot a$

5) <u>ההפיכים</u> : רק e=5 הוא הפיך.

ב) לזכור שלמשוואה $ax+by=c$ עם מקדמים שלמים קיים פתרון ב $\mathbf{Z}$ אם ורק אם $(a,b)/c$.

אם היה פתרון x :

$\bar{5}\cdot\bar{x}=\overline{132}\to\ \ 5x-132\underset{y\in\mathbf{Z}}{=}y65\ \to 5x-y65=132$

כלומר למשוואה $5x-65y=132$ יש פתרון . אבל זה לא יתכן כי $(5,65)=5$ <u>שלא מחלק את 132.</u>

ג) הטענה לא נכונה : לדוגמא $(X\ ,+)$ $X:=\{0,1,2,\cdots\}$ מהווה מונואיד עם צמצום אבל לא חבורה .

<u>שאלה 2</u> : א)
$$(U_{10},\cdot)=\{\bar1,\bar3,\bar7,\bar9\}=\langle\bar3\rangle$$
$$\Omega_3\cong(Z_3,+)=\{\bar0,\bar1,\bar2\}=\langle\bar1\rangle$$

$$U_{10}\times\Omega_3\cong\ {}_4\times\ {}_3\cong\ {}_{12}$$

התמונות אפימורפיות הן איזומורפיות למנה של החבורה בכל תת חבורה (פה מדובר על חבורה קומוטטיבית)
לכן התשובה היא כל החבורות הציקליות בגדלים שמחלקים מספר 12.

ב) החבורה ציקלית אינסופית ולכן נוצרת רק על ידי a או ההפכי שלו:

$$a^{-1}=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2010}\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{2010}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$For\ all\ n\in \mathbf{Z}:$$

$$\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2010}\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{n}=\begin{pmatrix}1 & n\sqrt{2010}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\langle a\rangle=\left\{\begin{pmatrix}1 & n\sqrt{2010}\\ 0 & 1\end{pmatrix}:n\in \mathbf{Z}\right\}=\langle a^{-1}\rangle$$

<u>אוטומורפיזם</u> : יש רק 2 : אחד הוא הזהות והשיני מעביר $f(a)=a^{-1}\rightarrow f(a^{k})=a^{-k}$

<u>תת חבורות</u> : הן ציקליות,אינסופיות, ואז הן בצורה : $H=\langle a^{k}\rangle,\quad where\ k=\min\{k\in N:a^{k}\in H\}$

ג) אין אפימופיזם כזה כי התחום קומוטטיבי והטווח לא. אם היה אז $u\cdot v=f(a)\cdot f(b)=f(a\cdot b)=f(b\cdot a)=f(b)\cdot f(a)=v.u$ והיינו מקבלים שהטווח קומוטטיבי, סתירה.

<u>**שאלה 3**</u> :

א. אם היה איזוורפיזם כזה, היה מתקיים :

$$f(-1).f(-1)=f(1)=1\rightarrow\begin{cases}f(-1)=-1\\ or\\ f(-1)=1\end{cases}\xrightarrow[\text{ISOMORPHIS is one to one and } f(1)=1.]{} f(-1)=-1$$

$$Then:$$

$$-1=f(-1)=f(i^{2})=\left(f(i)\right)^{2}$$

ואז קבלנו מספר ממשי שהריבוע שלו שווה -1 . סתירה.

ב.

$$(\Omega_{2010},\cdot)\cong(\mathbf{Z}_{2010},+)$$

$$We\ take:$$

$$f:\mathbf{Z}_{2010}\rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

$$f(\bar{n})=\frac{n}{2010}+\mathbf{Z}$$

$$(\Omega_{2010},\cdot) \cong (\mathbf{Z}_{2010},+)$$

$$f(\overline{n_1}+\overline{n_2}) = \frac{n_1+n_2}{2010}+\mathbf{Z} = \left(\frac{n_1}{2010}+\mathbf{Z}\right)+\left(\frac{n_2}{2010}+\mathbf{Z}\right)$$

$$f(\overline{n}) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{n}{2010}\right) \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow n = k2010 \Leftrightarrow \overline{n} = 0$$

$= = = = = = =$

ג) הערה : אוטומורפיזם פנימי במקרה של חבורה אבלית הוא הזהות.

$$U_{12} == \{\overline{1},\overline{5},\overline{7},\overline{11}\} \cong {}_{2} \times {}_{2}$$

נגדיר :

$$\left.\begin{array}{l} f: U_{12} \to U_{12} \\ f(\overline{1}) = \overline{1} \\ f(\overline{5}) = \overline{7} \\ f(\overline{7}) = \overline{5} \\ f(\overline{11}) = f(\overline{5})\cdot f(\overline{7}) = \overline{11} \end{array}\right\}$$

שאלה 4 :

א) המשפט הוכח בשיעור.

$$\varphi(100) = euler(100) = 40 \to 59^{40} \equiv 1(\bmod 100)$$

$$3002 = 40\cdot 75 + 2$$

$$1959 \equiv 59(\bmod 100) \Rightarrow 1959^{3002} \equiv 59^{3002}(\bmod 100) \underset{59^{3002}=59^{40\cdot 75}59^{2}}{\underset{\downarrow}{\equiv}} 59^{2}(\bmod 100) \equiv 81(\bmod 100)$$

ואז 81 הן שתי הספרות האחרונות.

ב) הוכחנו בשיעור.

ג) יש לנו שתי אפשרויות :

1)

$$G \cong \mathbf{Z}_{p^2} \to G\ cyclic$$

$$G = \{e, a, ..., a^{p^2-1}\}$$

In this case we have $\varphi(p^2)$ *automorphisms.*

$p \geq 2,$ *then* :

$$\varphi(p^2) = p^2 - p \geq p^2 - 2p + 2$$

2) אפשרות שניה:

$$G \cong \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$$
$$f = \left(f_1, f_2\right)$$
$$f_i : \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}_p, \quad isomorphism$$

יש לנו $\varphi(p) = p-1$ אפשרויות ל f_i ולכן דרכם $(p-1)^2$ אוטומורפיזמים ב G. בנוסף יש עוד לפחות אחד אוטומורפיזם המוגדר ע"י היפוך קאורדינטות ז"א $G \to G, (x,y) \mapsto (y,x)$. לכן יש לפחות $(p-1)^2 + 1 = p^2 - 2p + 2$.

שאלה 5 : א)

$$X = \quad \times \{1,2,3\}$$
$$G =$$
$$Define:$$
$$G \times X \to X$$
$$t * (x,y) = (t+x, y)$$

יש בדיוק 3 מסלולים (והם לא טריוויאליים)

$$\times \{3\}$$
$$\times \{2\}$$
$$\times \{1\}$$

ב) טענה נכונה:

$$Number\ of\ Conjugation\ classes:$$
$$\rho(6) = 11$$
$$Number\ of\ abelian\ groups:$$
$$3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$$
$$\rho(4)\rho(2)\rho(2) = 20$$

לא ציקליות 19=20-1

ג)

$$G = \left\{e, a, a^2, a^3\right\}$$
$$Burnside: \frac{\sum_{g \in G} \left|X_g\right|}{|G|} = \frac{1}{4}\left(5^9 + 2 \cdot 5^3 + 5^5\right)$$

e	**5^9**
a	**5^3**
a^2	**5^5**
a^3	**5^3**

<u>שאלה 6:</u>

א: הוכחנו בשיעור.

ב)

$$2 = 2^2 \times 3 \times 11$$

$$\left.\begin{array}{l} n_{11} \equiv 1(\bmod 11) \\ n_{11} / 12 \end{array}\right\} n_{11} = 1 \; or \; 12$$

$$\left.\begin{array}{l} n_3 \equiv 1(\bmod 3) \\ n_3 / 44 \end{array}\right\} n_3 = 1 \; or \; 4 \; or \; 22$$

נניח מספר התת חבורות SYLOW עבור 11 שונה מ 1. אז שווה 12. אם סופרים איברי כל ה 11- SYLOW- (שחיתוכן שווה e) ונניח יש לפחות 4 חבורות 3- SYLOW (גם חיתוכן e) יש כבר 131 איברים , כי גם בין שתי הטיפוסים לא נחתכים. בנוסף יש לפחות תת חבורה אחת SYLOW -2 עם 4 איברים (3 מהם חדשים). עברנו את 132.

<u>ג)</u>

$$297 = 11 \times 3^3$$

$$H \le G \wedge |H| = 11$$

$$n_{11} = 11k + 1 \,|\, 27 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow n_{11} = 1 \Rightarrow H \lhd G$$

$$\boxed{|G/H| = 27 = 3^3} \Rightarrow Z\left(G/H\right) \ne \{e\}$$