פתרון תרגיל בית 4

שאלה 1

חשב את האינטגרליים היעזר בזהויות טריגונומטריות:

א. $\int\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)dx$.

ב. $\int \sin^2 3xdx$.

ג. $\int 7\cot^2\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)dx$

פתרון שאלה 1

סעיף א

$$\int\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)dx=\int\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx=$$

$$\int\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx=\int \cos 2xdx=\frac{1}{2}\sin 2x+C$$

סעיף ב

נשתמש בזהות $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

$$\int \sin^2 3xdx=\int\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 6x}{2}\right)dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin 6x}{12}+C.$$

סעיף ג

נשתמש בזהות $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$.

$$\int 7\cot^2\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)dx=\int\frac{7}{\sin^2\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)}dx-\int 7dx=-\frac{7}{4}\cot\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)-7x+C.$$

שאלה 2

חשב את האינטגרליים הבאים בעזרת הצבות טריגונומטריות

$x=a\sin t, x=a\cos t, x=\frac{a}{\sin t}, x=a\tan t$:

א. $\int x^4\sqrt{1-x^2}dx$.

ב. $\int\frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}dx$.

ג. $\int\sqrt{x^2+9}dx$.

פתרון שאלה 2

סעיף א

נציב $x=\sin t$ ואז $dx=\cos tdt$.

$$\int x^4\sqrt{1-x^2}dx=\int \sin^4 t\cos^2 tdt.$$

נשתמש בזהויות $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

$$\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}, \sin^4 t=\frac{(1-\cos 2t)^2}{4}.$$

$$\sin^4 t\cos^2 t=\frac{(1-\cos 2t)^2}{4}\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}=\frac{(1-\cos 2t)(1-\cos^2 2t)}{8}=\frac{(1-\cos 2t)\sin^2 2t}{8}$$

$$\int\sin^4 t\cos^2 t\,dt=\frac{1}{8}\int\sin^2 2t\,dt-\frac{1}{8}\int\sin^2 2t\cos 2t\,dt.$$

נחשב את $\int\sin^2 2t\,dt$. נשתמש שוב בזהות $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

$$\int\sin^2 2t\,dt=\int\frac{1}{2}dt-\frac{1}{2}\int\cos 4t\,dt=\frac{t}{2}-\frac{\sin 4t}{8}.$$

$$\int\sin^2 2t\cos 2t\,dt=\frac{\sin^3 2t}{6}.$$

סה"כ נקבל ש $\int\sin^4 t\cos^2 t\,dt=\frac{t}{16}-\frac{\sin 4t}{64}-\frac{\sin^3 2t}{48}$

$x=\sin t$

נשתמש בזהויות: $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$, $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

$$\sin 4t=2\sin 2t\cos 2t=4\sin t\cos t\left(1-2\sin^2 t\right)=\left(4\sin t-8\sin^3 t\right)\sqrt{1-\sin^2 t}=\left(4x-8x^3\right)\sqrt{1-x^2}.$$

$$\sin^3 2t=8\sin^3 t\cos^3 t=8\sin^3 t\left(1-\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}$$

סה"כ נקבל

$$\int x^4\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\arcsin x}{16}-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{16}+\frac{x^3\sqrt{1-x^2}}{8}-\frac{x^3\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}{6}+C=$$
$$\frac{\arcsin x}{16}+x\sqrt{1-x^2}\left[-\frac{1}{16}-\frac{x^2}{24}+\frac{x^4}{6}\right]+C$$

<u>סעיף ב</u>

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}dx$$

נציב $x=\frac{\sin t}{2}$ ונקבל $dx=\frac{\cos t}{2}dt$

$$\sqrt{1-4x^2}=\sqrt{1-4\cdot\frac{\sin^2 t}{4}}=\left|\cos t\right|$$

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}dx=\int\frac{\sin^2 t}{4\cos t}\cdot\frac{\cos t}{2}dt=\frac{1}{8}\int\sin^2 t\,dt=\frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{t}{16}-\frac{\sin 2t}{32}=$$
$$=\frac{t}{16}-\frac{\sin t\cos t}{16}=\frac{t-\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}}{16}=\frac{\arcsin 2x-2x\sqrt{1-4x^2}}{16}+c$$

<u>סעיף ג</u>

נציב $x=3\tan t$ ואז $dx=\frac{3dt}{\cos^2 t}$.

$$\int\sqrt{x^2+9}\,dx=\int\frac{3\sqrt{9\tan^2 t+9}}{\cos^2 t}dt=3\int\sqrt{\frac{9}{\cos^2 t}}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt=9\int\frac{1}{\cos^3 t}dt$$

נשאר לחשב את $\int \frac{1}{\cos^3 t}dt$. נציב $u=\sin t$ ואז $du=\cos t dt$.

$$\int \frac{1}{\cos^3 t}dt=\int \frac{\cos t}{\cos^4 t}dt=\int \frac{\cos t}{\left(1-\sin^2 t\right)^2}dt=\int \frac{1}{\left(1-u^2\right)^2}du=\int \frac{1}{(1+u)^2(1-u)^2}du=$$

$$\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{(1+u)^2}+\frac{1}{1-u}+\frac{1}{(1-u)^2}\right)du=\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|-\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)=\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+\frac{2u}{1-u^2}\right)$$

נציב חזרה $u=\sin t$ ונקבל $9\int \frac{1}{\cos^3 t}dt=\frac{9}{4}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|+\frac{9\sin t}{2\cos^2 t}$

נשתמש בזהות $\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$.

נשים לב ש $\frac{\sin t}{\cos^2 t}=\tan t\cdot\frac{1}{\cos t}=\tan t\cdot\sqrt{\tan^2 t+1}$

$$\frac{1+\sin t}{1-\sin t}=\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\cdot\frac{1+\sin t}{1+\sin t}=\frac{1+2\sin t+\sin^2 t}{\cos^2 t}=\frac{1}{\cos^2 t}+2\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}$$

מהזהויות שרשמתי לפני כן נקבל ש

$$\frac{1+\sin t}{1-\sin t}=\tan^2 t+1+2\tan t\sqrt{\tan^2 t+1}+\tan^2 t=2\tan^2 t+2\tan t\sqrt{\tan^2 t+1}+1=$$
$$\left(\tan t+\sqrt{\tan^2 t+1}\right)^2$$

$$\frac{9}{4}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|+\frac{9\sin t}{2\cos^2 t}=\frac{9}{4}\ln\left(\tan t+\sqrt{\tan^2 t+1}\right)^2+\frac{9}{2}\tan t\sqrt{\tan^2 t+1}=$$
$$\frac{9}{2}\ln\left(\tan t+\sqrt{\tan^2 t+1}\right)+\frac{9}{2}\tan t\sqrt{\tan^2 t+1}$$

$$\frac{9}{2}\ln\left(\frac{x}{3}+\sqrt{\frac{x^2}{9}+1}\right)+\frac{9}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\sqrt{\frac{x^2}{9}+1}=\frac{9}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+9}}{3}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{x^2+9}$$
.
$$=\frac{9}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{x^2+9}-\frac{9}{2}\ln 3$$

הפתרון הוא עד כדי קבוע ולכן נקבל $\frac{9}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{x^2+9}+c$.

<u>שאלה 3</u>

חשב את האינטגרליים הבאים בעזרת הצבה אוניברסלית:

א. $\int \frac{1}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}dx$.

ב. $\int \frac{1-3\sin 2x}{1+\cos 2x}dx$.

<u>פתרון שאלה 3</u>

<u>סעיף א</u>

נציב $t=\tan\frac{x}{2}$ ואז $\cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1}, \sin x=\frac{2t}{t^2+1}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

$$\int \frac{1}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}dx=\int \frac{1}{\frac{2t}{t^2+1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}t^2}{t^2+1}}\cdot\frac{2}{t^2+1}dt=\int\frac{2dt}{-\sqrt{3}t^2+2t+\sqrt{3}}=\int\frac{2dt}{\left(-\sqrt{3}t-1\right)\left(t-\sqrt{3}\right)}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{dt}{-\sqrt{3}t-1}=-\frac{1}{2}\ln\left|t-\sqrt{3}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|-\sqrt{3}t-1\right|=-\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}-\sqrt{3}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|-\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}-1\right|$$

<u>סעיף ב</u>

נציב $t=tgx$ ואז $dx=\frac{dt}{1+t^2},\sin 2x=\frac{2t}{1+t^2},\cos 2x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\int\frac{1-3\sin 2x}{1+\cos 2x}dx=\int\left(1-\frac{6t}{1+t^2}\right):\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\int\frac{t^2-6t+1}{1+t^2}:\left(\frac{2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{t^2-6t+1}{2+2t^2}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{t^2+1}{t^2+1}-\frac{6t}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(1-3\cdot\frac{2t}{t^2+1}\right)dt=\frac{t}{2}-\frac{3}{2}\ln\left(t^2+1\right)+c=\frac{tgx}{2}-\frac{3}{2}\ln\left(\left(tgx\right)^2+1\right)+c$$

<u>שאלה 4</u>

פתור באמצעות נוסחת נסיגה את האינטגרל הבא:

$$\int x^n\sin xdx$$

<u>פתרון</u>

נסמן $I_n=\int x^n\sin xdx$. נחשב תחילה את I_1.

$$I_1=\int x\sin xdx=-x\cos x+\sin x$$

נחשב את $I_n=\int x^n\sin xdx$ בעזרת אינטגרציה בחלקים ונקבל

$$I_n=\int x^n\sin xdx=-x^n\cos x+n\int x^{n-1}\cos xdx=-x^n\cos x+n\left(x^{n-1}\sin x\right)-n\left(n-1\right)\int x^{n-2}\sin xdx=$$

$$=-x^n\cos x+nx^{n-1}\sin x-n\left(n-1\right)I_{n-2}$$

מכיוון שקיבלנו את I_n באמצעות I_{n-2} יש לחשב בנוסף ל I_1 גם את I_2.

$I_2=\int x^2\sin xdx$.

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים

נסמן: $u'=2x\Leftarrow u=x^2$

$v=-\cos x\Leftarrow v'=\sin x$

$$I_2=\int x^2\sin xdx=-x^2\cos x+2\int x\cos xdx=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$$

נקבל את התשובה

$$I_n=-x^n\cos x+nx^{n-1}\sin x-n\left(n-1\right)I_{n-2}$$

$$I_1=-x\cos x+\sin x$$

$$I_2=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$$