תרגול 6 - אי תלות וחוק 0־1 של קולמגורוב - תשע"ט

29 במרץ 2019

- **<u>תזכורת</u>**

1. **<u>משתנה מקרי ־ הכללות</u>**

(א) הגדרנו משתנה מקרי $X:(\Omega,\mathcal{F})\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ כפונקציה מדידה ממרחב המדגם Ω ל־ $\mathbb{R}$ כלומר פונקציה המקיימת $\forall_{B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}X^{-1}(B)\in\mathcal{F}$.

(ב) ניתן להכליל את ההגדרה ל־ $X:(\Omega,\mathcal{F})\to(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ פונקציה מדידה ממרחב המדגם Ω ל־ $\mathbb{R}^n$ כלומר פונקציה המקיימת $\forall_{B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}X^{-1}(B)\in\mathcal{F}$.

(ג) באופן הכללי ביותר נגדיר משתנה מקרי $X:(\Omega_1,\mathcal{F}_1)\to(\Omega_2,\mathcal{F}_2)$ כאשר Ω_1 אוסף כל תוצאות הניסוי האפשריות (מרחב מדגם). ו־ $\mathcal{F}_1$ סיגמא אלגברה המחלקת את מרחב המדגם לקבוצות מדידות. כמו כן, $(\Omega_2,\mathcal{F}_2)$ מרחב מידה כללי כאשר Ω_2 מרחב מדיד ו־ $\mathcal{F}_2$ אוסף של תתי קבוצות מדידות. המשתנה המקרי יקיים $\forall_{B\in\mathcal{F}_2}X^{-1}(B)\in\mathcal{F}_1$.

<u>הערה</u> ־ לצרכי נוחות נגדיר משתנה מקרי ע"י $X:\Omega\to\mathbb{R}$ כפי שנהוג.

2. **<u>סיגמא אלגברה הנוצרת ע"י משתנה מקרי</u>**

(א) $\sigma(X)=\{X^{-1}(B)\subseteq\Omega\,|\,B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\}=X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ־ הסיגמא אלגברה המינימלית עבורה X מדידה.

(ב) $\sigma(X_1,X_2,...,X_n)=\{X_i^{-1}(B)\subseteq\Omega\,|\,B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}),\,i\in\{1,2,...,n\}\}$ ־ הסיגמא אלגברה המינימלית עבורה המשתנים המקריים $X_1,X_2,...,X_n$ מדידים.

3. **<u>אי תלות - משתנים מקריים וסיגמא אלגבראות</u>**
X,Y משתנים מקריים בלתי תלויים $\Longleftrightarrow$ $\sigma(X),\sigma(Y)$ סיגמא אלגבראות בלתי תלויות $\Longleftrightarrow$

$$\forall_{A\in\sigma(X)}\forall_{B\in\sigma(Y)}\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

מושג חדש של מערכות $(\pi\backslash\lambda)$ יתן כלי יעיל לעיסוק עם אי תלות של סיגמא אלגבראות.

- **<u>מערכות</u>** $(\pi$- $\lambda)$

1. **הגדרה** - מערכת $\mathcal{C}\subseteq 2^{\Omega}$ היא $\pi-System$ אם $A,B\in\mathcal{C}\Rightarrow A\cap B\in\mathcal{C}$ (סגורה לחיתוכים סופיים).
2. **הגדרה** - מערכת $\mathcal{L}$ המכילה תתי קבוצות של Ω היא $\lambda-System\,(Dynkin\,System)$ אם:

   (א) $\Omega\in\mathcal{L}$
   (ב) $(A,B\in\mathcal{L})\wedge(A\subseteq B)\Rightarrow B\backslash A\in\mathcal{L}$
   (ג) $(\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{L})\wedge(\forall_{n\geq 1}A_n\subseteq A_{n+1})\Rightarrow\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}A_n\in\mathcal{L}$

3. **תרגיל**: אם $\mathcal{A}$ היא אלגברה אז $\mathcal{A}$ היא $\pi-System$.
   פתרון
   נזכר כי בהגדרה של אלגברה הסגורה לחיתוך ולאיחוד סופיים ולמשלימים.
4. **תרגיל:** $\mathcal{F}$ היא σ-אלגברה אם ורק אם היא גם $\pi-System$ וגם $\lambda-System$ (מסקנה ממשפט מההרצאה).
5. **מוטיבציה** - נתעניין בהגדרת מערכות π ו-λ מ-2 סיבות עיקריות:

   (א) הקשר המיוחד שיש בין המערכות הללו ל-σ אלגבראות מאפשרת עבודה נוחה יותר עם מושג ה-אי-תלות.
   (ב) יהי $\mathcal{C}$ מערכת π. אם 2 מידות הסתברות $\mathbb{P}_1:\mathcal{F}_1\to[0,1]$, $\mathbb{P}_2:\mathcal{F}_2\to[0,1]$ מעל מרחבי ההסתברות המתאימים מקיימים $\forall_{A\in\mathcal{C}}\mathbb{P}_1(A)=\mathbb{P}_2(A)$ וגם $\mathbb{P}_1(\Omega)=\mathbb{P}_2(\Omega)<\infty$ אזי (קרת'אודורי): $\forall_{A\in\sigma(\mathcal{C})}\mathbb{P}_1(A)=\mathbb{P}_2(A)$.
   בפרט, אם $\mathcal{F}_1=\mathcal{F}_2=\sigma(\mathcal{C})$ אז $\mathbb{P}_1=\mathbb{P}_2$.

6. **המשפט (בשפת בני אדם)** ־ אם 2 מידות הסתברות מסכימות על $\pi - System$ היוצרת סיגמא אלגברה נתונה במרחב הסתברות כלשהוא. אז הן מסכימות על הסיגמא אלגברה עצמה. קרי, מידות ההסתברות שוות.
הערך של משפט זה טמון בכך שמידת הסתברות ניתנת להגדרה באופן יחיד בהנתן ואנו יודעים את ערכי המידה לאיברי מערכת π בלבד (באופן דומה למשפט ההגדרה לפי בסיס באלגברה לינארית).

(א) <u>דוגמא</u>: (סיגמא אלגברת־בורל)

i. תהי $S = \{\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R} | \, \mathcal{O} is \, Open \, in \, \mathbb{R}\}$. אז $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(S)$(לפי הגדרה)

א'. **תרגיל:** $\pi_1(\mathbb{R}) = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$ היא מערכת π.
ב'. **תרגיל:** $\pi_2(\mathbb{R}) = \{(x, y] : x, y \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$ היא מערכת π.

ii. טענה ־ מתקיים: $\sigma(S) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\pi_1(\mathbb{R}))$.
iii. אם יש $\mathbb{P}_1 : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$, $\mathbb{P}_2 : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ כך ש־ $\forall_{A \in \pi(\mathbb{R})} \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)$ אז בהכרח מתקיים $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ (אין צורך לבדוק על כל $\mathcal{B}(\mathbb{R})$)

7. אנו מכירים 2 ניסוחים למשפט מההרצאה ־ (משפט $\pi - \lambda$)

(א) אם $\mathcal{C}$ היא מערכת π. אז $\lambda\langle\mathcal{C}\rangle = \sigma\langle\mathcal{C}\rangle$ (מערכת λ הקטנה ביותר הנוצרת ע"י $\mathcal{C}$)
(ב) יהי $\mathcal{L}$ מערכת־λ ו־ $\mathcal{C}$ מערכת־π כך ש־ $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}$ אזי $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{L}$.

8. **אי תלות של σ־אלגבראות** ־ יהיו 2 מערכות־π $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$כך ש־ $\mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{C}_2)$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(\mathcal{C}_1)$אז מתקיים:
$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ בלתי תלויים $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ בלתי תלויים $\Leftrightarrow$ $\forall_{A_1 \in \mathcal{C}_1} \forall_{A_2 \in \mathcal{C}_2} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot (A_2)$.

9. **תרגיל** ־ יהיו $\{X_1, ..., X_n\}$ משתנים מקריים המקיימים כי $\pi(X_i), \pi(X_j)$ ($i \neq j$) בלתי תלויים בזוגות. הוכח:
$\mathbb{P}(X_i \leq t_i \, | \, 1 \leq i \leq n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq t_i)$.
פתרון
$\pi(X_i), \pi(X_j)$ ($i \neq j$) ב"ת $\Longleftrightarrow$ $\sigma(X_i), \sigma(X_j)$ ($i \neq j$) ב"ת $\Longleftrightarrow$ המאורעות

$X_i^{-1}(-\infty,t_i)$ מדידים $\sigma(X_i)$ ולכן מתקיים $\mathbb{P}(X_i \le t_i \,|\, 1 \le i \le n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \le t_i)$.

- **<u>סינון עולה / יורד ומאורעות זנב</u>**

1. **הגדרה (סינון עולה/ סינון יורד)** - יהי $(\Omega,\mathcal{F})$ מרחב מדיד. אוסף הסיגמא אלגבראות $\{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^{\infty}$ המוכלות ב- $\mathcal{F}$ ומקיימות $\forall_{i<j}\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$ מכונה סינון של המרחב המדיד $(\Omega,\mathcal{F})$. באופן דומה, אוסף כזה המקיים $\forall_{i<j}\mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}_i$ נקרא סינון יורד.
2. **הגדרה (σ-אלגברת זנב)** - יהי $\{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^{\infty}$ סינון יורד. אזי $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$ הוא σ-אלגברת הזנב של $\{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^{\infty}$. מאורע מדיד ביחס לסיגמא אלגברת הזנב נקרא "מאורע זנב".
3. **אינטואיציה** - ניתן לחשוב על סינון עולה בתור כל מה שידוע לנו עד זמן t. וסינון יורד בתור כל מה שלא ניתן ללמוד עליו דבר עד זמן t. באופן דומה, אינטואינטיבית ניתן לחשוב על סיגמא-אלגברת זנב כמכילה את כל המידע שלא אדע לעולם.
4. **הגדרה** - יהי $(\Omega,\mathcal{F})$ מרחב מדיד ויהי $\{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^{\infty}$ סינון עולה או יורד שלו. נאמר כי סדרת מאורעות $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ מכבדת את הסינון אם $\forall_i A_i \in \mathcal{F}_i$.

- **<u>חוק 0-1 של קולמגורוב (מאורעות זנב של סדרת ניסויים בלתי תלויים לעולם אינם מקריים)</u>**

1. גרסא א' - יהא $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות. ויהיו סדרת מאורעות $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ בלתי תלויים. ויהי סינון יורד $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ המוגדר ע"י $\mathcal{F}_n = \sigma(\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i) = \sigma(A_n, A_{n+1}, ...)$ויהי $A \in \mathcal{F}_\infty$. אזי $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$.
2. גרסא ב' - יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים (לא בהכרח שווי התפלגות) במרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. נגדיר סדרת סגמא אלגבראות $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, ...)$ ו- $\mathcal{F}_\infty = \cap\mathcal{F}_n$. אם $A \in \mathcal{F}_\infty$. אזי $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$.

(א) **דוגמא -** יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים. אזי הקבוצה $A = \{\omega \in \Omega \,|\, \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) < \infty\}$ היא מאורע זנב ביחס לסינון הטבעי ($\mathcal{F}_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, ...)$ ו- $\mathcal{F}_\infty = \cap\mathcal{F}_n$) . הסיבה לכך, היא כי אם לכל

k נגדיר
$A_k = \{\omega \in \Omega \mid \sum\limits_{n=k}^{\infty} X_n(\omega) < \infty\}$. נשים לב קודם כי $A_k \in \mathcal{F}_k$. (למה $A_k \in \mathcal{F}_k$? סכום סופי של פונקציות מדידות הוא מדיד, ואז ה־ lim של פונקציה מדידה גם מדיד). עתה, מתקיים $\forall_k\, A = A_k \in \mathcal{F}_k$ לכן, $A \in \mathcal{F}_\infty$. (מאינפי, שיוויון טורים / הזזת אינדקסים - באופן כללי, טור מתכנס אם הסנב של הטור מתכנס).

(ב) **תרגיל -** הראה כי לכל סדרת מאורעות $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ ב"ת המכבדים סינון יורד. המאורע $\{A_i\, i.o\}$ הוא מאורע זנב. (שימו לב כי התרגיל מתיישב עם למת בורל קנטלי).

פתרון

תחילה, אינטואיטיבית, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ מכבדים סינון יורד לכן, $\forall_i A_i \in \mathcal{F}_i \supseteq \mathcal{F}_{i+1}$ אז לפי האנליזה מודרנית גם מאורע הסופרימום מדיד - $\limsup\limits_{i\to\infty} A_i \in \mathcal{F}_i$ וכן, מתקיים $\forall_i \limsup\limits_{i\to\infty} A_i = \limsup\limits_{i\to\infty} A_{i+1} \in \mathcal{F}_i$ ולכן, $\limsup\limits_{i\to\infty} A_i \in \mathcal{F}_\infty$ אז לפי חוק 0-1 של קולמגורוב $\mathbb{P}(\{A_i\, i.o\}) \in \{0,1\}$. - נסו לפתור בעצמכם בדרך נוספת.