תרגיל 7

1 במאי 2018

פתרו את המד"רים הבאים באמצעות הצבות מתאימות:

1. $y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$.
פתרון:

זאת משוואה הומוגנית.

נציב $z = \frac{y}{x}$. לכן: $y = zx$, ולכן: $y' = z + xz'$. נציב זאת במשוואה המקורית:

$$y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x} \Longrightarrow z + xz' = z + \tan z$$

לכן:

$$x\frac{dz}{dx} = \tan z$$

כלומר:

$$\frac{dz}{\tan z} = \frac{dx}{x}$$

נבצע אינטגרציה על שני האגפים ונקבל:

$$\int \frac{\cos z}{\sin z}dz = \int \frac{dx}{x}$$

כלומר:

$$\ln\sin z = \ln x + C$$

לפיכך, $\sin z = \tilde{C}x$. כלומר $z = \arcsin\tilde{C}x$ נחזור ל־y ונקבל:

$$\frac{y}{x} = \arcsin\tilde{C}x$$

ולכן: $y = x\arcsin\tilde{C}x$.

2. $y' = -\frac{2y}{x} + x^2y^4$.
פתרון:

זאת משוואת ברנולי.

ראשית, נשים לב שיש פתרון סינגולרי $y(x) = 0$.

כעת, נמצא את הפתרון הכללי.

נחלק ב־y^4 ונסדר את המשוואה, ונקבל:

$$\frac{y'}{y^4} + \frac{2}{xy^3} = x^2$$

נציב: $z = y^{-3}$. נקבל: $z' = -3y^{-4}y'$, ולכן המשוואה תהיה:

$$-\frac{z'}{3} + \frac{2z}{x} = x^2$$

כלומר:

$$z' - \frac{6z}{x} = -3x^2$$

זאת משוואה לינארית. $a(x) = -\frac{6}{x}, b(x) = -3x^2, A(x) = -6\ln x$.

לכן: $z = e^{6\ln x}(\int e^{-6\ln x}(-3x^2)dx + C) = x^6(x^{-3} + C) = x^3 + Cx^6$

בסך הכל, הפתרון הוא: $z = x^3 + Cx^6$. נחזור חזרה ל־y:

$$y^{-3} = x^3 + Cx^6$$

ולכן:

$$y = \left(\frac{1}{x^3 + Cx^6}\right)^{\frac{1}{3}}$$

3. $y' = \frac{x^3+y^2\sqrt{x^2+y^2}}{xy\sqrt{x^2+y^2}}$.

פתרון:

זאת משוואה הומוגנית.

נחלק את המונה והמכנה ב־x^3 ונקבל:

$$y' = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\left(\frac{y}{x}\right)\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}$$

כמו בסעיף הקודם, נציב $z = \frac{y}{x}$. לכן $y' = z + xz'$, ואם נציב זאת חזרה במשוואה נקבל:

$$z + xz' = \frac{1 + z^2\sqrt{1 + z^2}}{z\sqrt{1 + z^2}}$$

כלומר:

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{1+z^2\sqrt{1+z^2}}{z\sqrt{1+z^2}}-z=\frac{1+z^2\sqrt{1+z^2}-z^2\sqrt{1+z^2}}{z\sqrt{1+z^2}}=\frac{1}{z\sqrt{1+z^2}}$$

ולכן:

$$z\sqrt{1+z^2}dz=\frac{dx}{x}$$

נבצע אינטרגציה על שני האגפים ונקבל:

$$\int z\sqrt{1+z^2}dz=\int\frac{dx}{x}$$

את האינטגרל השמאלי אפשר לפתור באמצעות ההצבה: $1+z^2=t$. $2zdz=dt$, ונקבל:

$$\int z\sqrt{1+z^2}dz=\frac{1}{2}\int\sqrt{t}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\left(1+z^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

אם כן:

$$\frac{1}{3}\left(1+z^2\right)^{\frac{3}{2}}==\ln|x|+C$$

לכן:

$$1+z^2=\left(3\ln|x|+C\right)^{\frac{2}{3}}$$

נחזור חזרה ל־y:

$$z^2=\left(3\ln|Cx|\right)^{\frac{2}{3}}-1$$

ולכן:

$$z=\pm\sqrt{\left(\left(3\ln|Cx|\right)^{\frac{2}{3}}-1\right)}$$

כלומר

$$y=\pm x\sqrt{\left(\left(3\ln|Cx|\right)^{\frac{2}{3}}-1\right)}$$

4. $y'=y+\frac{\sin 2x}{y^2}$.
פתרון:

זוהי משוואת ברנולי.

נכפיל ב-y^2 (שקול ללחלק בy^{-2}) ונסדר את המשוואה ונקבל:

$$y^2y' - y^3 = \sin 2x$$

נציב $z = y^3$. אם כן, $z' = 3y^2y'$. לכן:

$$\frac{z'}{3} - z = \sin 2x$$

כלומר:

$$z' - 3z = 3\sin 2x$$

זוהי משוואה לינארית מסדר ראשון. $a(x) = -3, b(x) = 3\sin 2x, A(x) = -3x$.

לכן הפתרון הוא: $z = e^{3x}(\int e^{-3x}3\sin 2xdx + C)$

עושים אינטגרציה בחלקים פעמיים, ומקבלים: $z = e^{3x}[e^{-3x}(-\frac{9\sin 2x+6\cos 2x}{13})+C]$

בסך הכל, הפתרון הוא: $z = -\frac{9\sin 2x+6\cos 2x}{13} + Ce^{3x}$. נחזור חזרה ל-$y$:

$$y^3 = -\frac{9\sin 2x + 6\cos 2x}{13} + Ce^{3x}$$

כלומר:

$$y = \left(-\frac{9\sin 2x + 6\cos 2x}{13} + Ce^{3x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

וזהו הפתרון.

5. $$y' = \frac{1}{5x + 6y + 3}$$

פתרון:

זאת משוואה מהסוג השלישי.

נציב: $z = 5x + 6y + 3$

$$z' = 5 + 6y'$$

נציב בחזרה במשוואה:

$$\frac{z' - 5}{6} = \frac{1}{z}$$

$$z' = \frac{6}{z} + 5 = \frac{6 + 5z}{z}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{6 + 5z}{z}$$

$$\left(\frac{z}{6 + 5z}\right) dz = dx$$

$$\int \frac{z}{6 + 5z} dz = \int dx$$

$$\int \frac{z}{6+5z}dz = \frac{1}{5}\int \frac{5z+6}{6+5z} - \frac{6}{6+5z}dz = \frac{1}{5}(z - \frac{6}{5}\ln(6+5z)) = \frac{z}{5} - \frac{6\ln(6+5z)}{25}$$

לכן $x + C = \frac{z}{5} - \frac{6\ln(6+5z)}{25}$

(לא ניתן לחלץ את z מפורשות)

ולבסוף מציבים $y = \frac{z-5x-3}{6}$

הערה: שימו לב לא לשכוח פתרונות סינגולריים. כמו כן, יש מקרים בהם לא ניתן לחלץ את z.