יחסי סדר

הגדרה: יחס R על A נקרא **אנטי-סימטרי** אם מתקיים

$$\forall x, y \in A : [(x,y) \in R] \wedge [(y,x) \in R] \rightarrow (x = y)$$

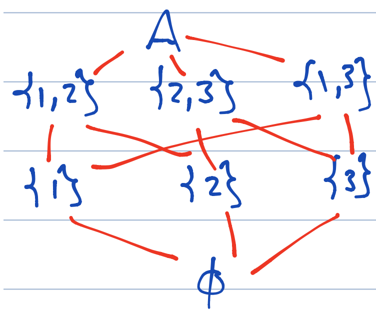
כלומר, אם $x \neq y$ אז לא יכול להיות שמתקיים היחס בין x לבין y **וגם** היחס בין y לx.

הגדרה: יחס R על A נקרא **יחס סדר חלקי** אם R רפלקסיבי, טרנזיטיבי ואנטי-סימטרי

דוגמאות ליחסי סדר חלקי:

- היחס 'קטן-שווה' על המספרים
- היחס 'מוכל-שווה' על הקבוצות
- היחס 'מחלק את ' על הטבעיים

$P(A)=\{\phi, \{1\},\{2\},\{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, A\}$



הגדרה. דיאגרמת הסה Hasse הינה דיאגרמה של יחס סדר חלקי על קבוצה. כל איבר המקושר לאיבר מתחתיו 'גדול' ממנו ביחס. נצייר את דיאגרמת הסה ליחס הכלה על קבוצת החזקה של הקבוצה $A = \{1,2,3\}$.

הגדרה: יהי R יחס על A, אזי **היחס ההופכי** מוגדר להיות $R^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in R\}$

תרגיל

הוכח שאם R יחס סדר חלקי, גם ההופכי שלו יחס סדר חלקי

פתרון

נתחיל ברפלקסיביות

R יחס חלקי $\rightarrow \forall a \in A\ (a,a) \in R \rightarrow (a,a) \in R^{-1}$

טרנזיטיביות:

$(a,b),(b,c) \in R^{-1} \rightarrow (b,a),(c,b) \in R \xrightarrow[\text{טרנ'}]{R} (c,a) \in R \rightarrow (a,c) \in R^{-1}$

אנטי סימטריות

$(a,b),(b,a) \in R^{-1} \rightarrow (b,a),(a,b) \in R \xrightarrow[\text{אנטי סימטרי}]{R} a=b$

איברים מיוחדים

הגדרות. יהיו A קבוצה וR יחס סדר חלקי על הקבוצה:

- איבר $x \in A$ נקרא **מינמלי** ביחס לR אם $\forall y \in A : (y,x) \in R \to y = x$. כלומר, אין איבר 'קטן' מx. לא חייב להתקיים ש-x ביחס כלשהו עם איבר כלשהו.
- איבר $x \in A$ נקרא **מקסימלי** ביחס לR אם $\forall y \in A : (x,y) \in R \to y = x$. כלומר, אין איבר 'גדול' מx. לא חייב להתקיים ש-x ביחס כלשהו עם איבר כלשהו.
- איבר $x \in A$ נקרא **איבר קטן ביותר/מינימום** ביחס לR אם $\forall y \in A : (x,y) \in R$. כלומר, x 'קטן' מכל האיברים. x חייב להיות ביחס עם כל האיברים בקבוצה. (דוגמא: הקבוצה הריקה תחת יחס הכלה)
- איבר $x \in A$ נקרא **איבר גדול ביותר/מקסימום** ביחס לR אם $\forall y \in A : (y,x) \in R$. כלומר, x 'גדול' מכל האיברים. x חייב להיות ביחס עם כל האיברים בקבוצה. (דוגמא: הקבוצה B תחת יחס ההכלה על קבוצת החזקה של B)

מינוח/סימון: עבור קבוצה A נסמן לעיתים יחס סדר ב $\leq$. לא להתבלבל עם ה"קטן שווה" ה"רגיל"! אם A קבוצה ו $\preceq$ יחס סדר עליה, נסמן $(A,\leq)$ ונקרא ל A קבוצה סדורה חלקית. עוד נאמר במקרה זה כי איבר x קטן שווה מאיבר y אם מתקיים $x \leq y$

הערה: קל להוכיח מתוך תכונת האנטי-סימטריות שאם קיים איבר מינימום הוא יחיד (למרות שהוא לא חייב להיות קיים), ונכון הדבר לגבי המקסימום.

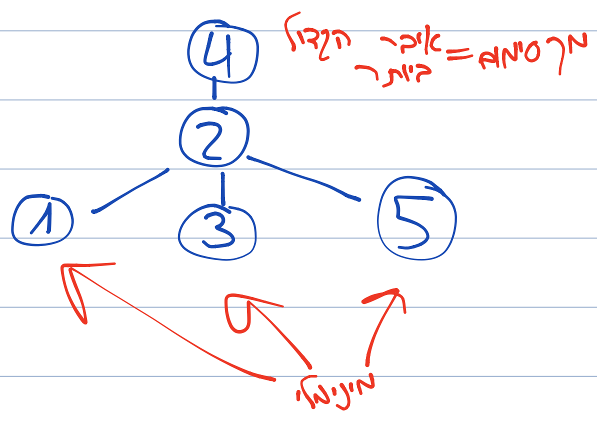
הערה: מינימום ← מינימלי, וכן מקסימום ← מקסימלי, ולא להיפך!

דוגמא:

נביט בקבוצה $A = \{1,2,3,4,5\}$ ונגדיר עליה יחס סדר חלקי:

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(2,4),(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)\}$$

(הזוגיים 'גדולים' מכל אי זוגיים ומהזוגיים הקטנים מהם)



תרגיל:

$(A,\leq)$ קבוצה סדורה. הוכיחו/הפריכו: x מינימלי ⟵ x איבר קטן ביותר.

אך סתירה. $\leq$ ⟵ הרגיל שאנחנו מכירים, $A = \mathbb{Z} \cup \{\frac{1}{2}\}$

תרגיל

תהא $(A, \le)$ קבוצה סדורה סופית לא ריקה. הוכיחו: קיים איבר מינימלי.

פתרון

באינדוקציה על גודל הקבוצה $|A|=n$.

$n=1$: כשהקבוצה מכילה רק איבר אחד הוא מינימלי ע"פ הגדרה

נניח את נכונות הטענה עבור $|A|=n-1$ ונוכיח עבור n.

תהא $(A,\le)$ $|A|=n$. ניקח $a\in A$ ונסתכל על הקבוצה $(A\setminus\{a\},\le)$

שם יש מינימלי b

נחלק למקרים:

אם $a\not\le b$ אז b עדיין מינימלי

אם $a\le b$ אז a מינימלי ב-A.

הוכחנו: שיש a מינימלי ב-A.

תרגיל:

$(A,\le)$ קבוצה סדורה. הוכיחו/הפריכו:

x מינימלי יחיד ו-y מקסימלי יחיד $\Leftarrow$ $x\le y$

$\mathbb{N}\cup f(\mathbb{N})$

פתרון:

x מינימלי יחיד 1

y מקסימלי יחיד -1

$(\ldots -3\ \ -2\ \ -1),(1\ \ 2\ \ 3 \ldots)$

הגדרה

יהי R יחס סדר חלקי על A. אם לכל שני איברים a,b בA מתקיים $[(a,b)\in R]\vee[(b,a)\in R]$ אזי R נקרא **יחס סדר קווי/לינארי**.

תרגיל

יהא $(A,\le)$ קבוצה סדורה קווית. הוכיחו כי אם x מינמאלי אז x קטן ביותר.

צ"ל x מינימלי $\longleftarrow$ x קטן ביותר

$$\Big(\forall y\in A\ \ (y,x)\in R\vee(x,y)\in R\Big)\wedge\Big((y,x)\in R\longrightarrow y=x\Big)$$

כי זה יחס מלא (לינארי)

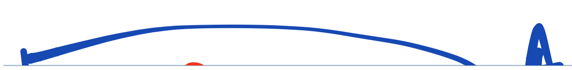
x מינימלי

אם $(x,y)\in R$ ✓

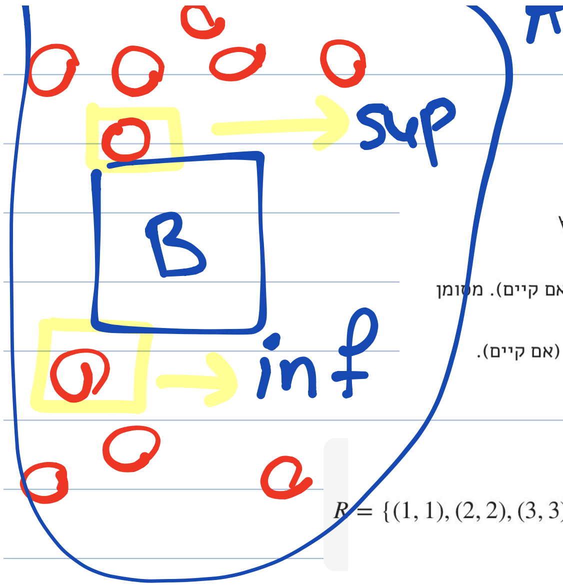
אם $(y,x)\in R$ $\longleftarrow$ $y=x$ (x מינימלי)

כיוון שלכל y $(x,y)\vee(y,x)\in R$, בגלל שx מינימלי נקבל

$\forall y\in A:(x,y)\in R\longrightarrow$ x קטן ביותר.



חסמים:



הגדרות. יהיו A קבוצה, B קבוצה המוכלת בה וR יחס סדר חלקי:

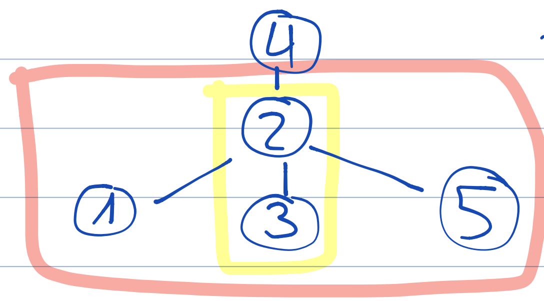
- חסם מלעיל של B הוא איבר $x \in A$ כך שמתקיים $\forall y \in B : (y, x) \in R$
- חסם מלרע של B הוא איבר $x \in A$ כך שמתקיים $\forall y \in B : (x, y) \in R$
- החסם העליון (סופרמום) של B הינו המינימום של קבוצת חסמי המלעיל (אם קיים). מסומן $sup(B)$
- החסם התחתון (אינפימום) של B הינו המקסימום של קבוצת חסמי המלרע (אם קיים). מסומן $inf(B)$

נביט בקבוצה $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ונגדיר עליה יחס סדר חלקי:

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (2,4), (1,2), (1,4), (3,2), (3,4), (5,2), (5,4)\}$$

(הזוגיים 'גדולים' מכל אי הזוגיים ומהזוגיים הקטנים מהם)

בתת קבוצה האדומה
חסמי מלעיל: 2,4
sup: 2
חסמי מלרע: אין.



בתת קבוצה הצהובה:
חסמי מלעיל: 2,4
חסמי מלרע: 3
sup: 2
inf: 3

דוגמא נוספת- $\mathbb{R} \supseteq B = \{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \dots\}$ (מה קורה ב-$\mathbb{Q}$?)

כשזה $B \subseteq \mathbb{R}$ $sup(B) = \sqrt{2}$
$inf(B) = 1$

כשזה $B \subseteq \mathbb{Q}$ חסמי מלעיל יהיו כל האיברים שגדולים משורש 2 אך לא נוכל למצוא חסם עליון (sup) כי לכל חסם מלעיל שנמצא, נוכל למצוא אחד קטן יותר.

תרגיל:

מצאו $X \subseteq P(\mathbb{N})$ כך שב-X קיים איבר B ללא חסם עליון.

$X = \{2\mathbb{N}, 3\mathbb{N}, 4\mathbb{N} \ldots\ldots\}$

אין חסם עליון

יחס סדר מילוני

יהיו $(A,\leq),(B,\preceq)$ שתי קבוצות סדורות חלקית.

על $A\times B$ ניתן להגדיר את **היחס המילוני** R ע"י

$$(a_1,b_1)R(a_2,b_2) \iff (a_1<a_2)\vee(a_1=a_2\wedge b_1\preceq b_2)$$

דוגמא

נסתכל על $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ עם הסדר המילוני.

נגדיר $B=\{(1,x)|x\in\mathbb{N}\}$ אזי $sup(B)=(2,1), inf(B)=(1,1)$

נגדיר $B=\{(x,1)|x\in\mathbb{N}\}$ אזי $inf(B)=(1,1)$ ו sup לא קיים.

- שימו לב ש $(1,1)$ הוא איבר קטן ביותר

מכפלה של יחסי סדר

יהיו $(A,\leq),(B,\preceq)$ שתי קבוצות סדורות חלקית.

על $A\times B$ ניתן להגדיר את היחס R הבא:

$$(a_1,b_1)R(a_2,b_2) \iff (a_1\leq a_2)\wedge(b_1\preceq b_2)$$

זהו יחס סדר:

הוכחה:

צ"ל רפלקסיבי, טרנזיטיבי, אנטי סימטרי:

רפלקסיבי:

צ"ל $\forall a\in A, b\in B \quad (a,b)R(a,b)$

כיוון ש $(A,\leq)$ $(B,\preceq)$ רפ"ס

לכל $a\in A, b\in B$ $\quad b\preceq b \quad a\leq a$

$$\Updownarrow$$

$(a,b)R(a,b)$

אס:

$$(a,b)R(c,d)\wedge(c,d)R(a,b)$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{(a\leq c)\wedge(c\leq a)}_{\downarrow}\wedge\underbrace{(b\preceq d)\wedge(d\preceq b)}_{\downarrow}$$

$a=c$ (A רפ"ס אנטי סימ') $\quad b=d$ (B רפ"ס)

תרגיל בבית טרנזיטיביות :)

דוגמה

נסתכל על $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ אם הסדר המוגדר לעיל.

נגדיר $B=\{(1,x)|x\in\mathbb{N}\}$ אזי $inf(B)=(1,1)$ ו sup לא קיים

נגדיר $B=\{(x,1)|x\in\mathbb{N}\}$ אזי $inf(B)=(1,1)$ ו sup לא קיים.

- שימו לב ש $(1,1)$ הוא איבר קטן ביותר.

תרגיל

נסתכל על $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ ותתי הקבוצות

- $B_1=\{(4,-x)|x\in\mathbb{N}\}$
- $B_2=\{(4,x)|x\in\mathbb{N}\}$
- $B_3=\{(x,4)|x\in\mathbb{N}\}$

1. מצאו, אם קיימים, sup ו inf לקבוצות B_2, B_3 כאשר $(\mathbb{N},\le)$ ו $(\mathbb{Z},\le)$ ו $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ עם יחס המכפלה

B_1 יחס המכפלה

$(4,-1)$ $(4,-2)$, $(4,-3)$ . . . .

האיבר הכי קטן שקדום מכל איברי B_1 הוא $sup=(4,-1)$

אין inf.

B_2 מכפלה

$(4,1)$ $(4\ 2)$ $(4\ 3)$.

sup לא קיים

$inf(B_2)=(4,1)$

B_3 מכפלה

$(1,4)$ $(2,4)$. . . .

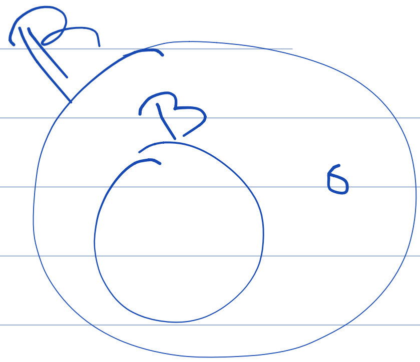
$inf(B_3)=(1,4)$ sup לא קיים

תרגיל ממבחן

הגדרה: תת קבוצה A של המספרים הממשיים נקראת 'מגניבה' אם לכל x,y בA כך ש-x שונה מ-y מתקיים שההפרש x-y אינו רציונאלי.

תהי B קבוצה מגניבה מקסימלית ביחס להכלה, הוכח שלכל מספר ממשי שאינו שייך לB קיים איבר בB כך שההפרש בינהם הוא רציונאלי.

הוכחה.



נניח בשלילה שקיים $r\in\mathbb{R}\setminus B$

לכל איבר $b\in B$ $r-b$ לא רציונלי.

נוסיף את r ל-B.

קיבלנו שהקבוצה $B\cup\{r\}$ מגניבה.

$B\cup\{r\}$ מכילה ממש את B בסתירה

למקסימליות של B ביחס להכלה

(מקסימליות ביחס להכלה $\Leftarrow$ $B=A \Leftarrow B\subseteq A$)

מש"ל

תרגיל

נביט בQ אוסף השברים המצומצמים. נביט בR היחס המוגדר על ידי $\left(\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}\right)$ אם $(m_1 \leq m_2) \wedge (n_1 \leq n_2)$. הוכיחו/הפריכו: R הינו יחס סדר חלקי.

פתרון.

נוכיח רפלקסיבי: ברור $n_1 \leq n_1$, $m_1 \leq m_1$ $\forall\left(\frac{m_1}{n_1}\right)$.

אנטי סימטריות:

אם $(m_1 \leq m_2) \wedge (n_1 \leq n_2)$ וגם $(m_1 \geq m_2) \wedge (n_1 \geq n_2) \leftarrow n_1 = n_2 \wedge m_1 = m_2$

ואז שני השברים המצומצמים שווים

אם לא היינו דורשים שברים מצומצמים $\frac{1}{3} \leq \frac{4}{16}$

תרגיל (ממבחן קיץ תשעה מועד ב)

תהא X קבוצת כל הסדרות הבינאריות (סדרה בינארית היא $a_1a_2a_3\dots$ כאשר $a_n \in \{0,1\}$).
נגדיר יחס R על X כך: עבור $a = a_1a_2\dots, b = b_1b_2\dots \in X$

$$aRb \iff \forall n\ a_n - b_n \neq (-1)^n$$

א. הוכיחו ש R יחס סדר על X

ב. קבעו האם R יחס סדר **מלא** על X

ג. מצאו (אם קיימים) איבר קטן וגדול ביותר ב X (ביחס ל R)

פתרון

n זוגי: $a_n - b_n \neq 1$

n אי: $a_n - b_n \neq -1$

$aRb \iff \forall k: a_{2k}=1 \to b_{2k}=1,\ a_{2k-1}=0 \to b_{2k-1}=0$

(א) תעשו לבד

(ב) לא יחס מלא כי: $a=0000\dots$ $b=11111\dots$
לא מתייחסים זה לזה

(ג) נשים לב $m=(101010\dots)$ תהיה האיבר הקטן ביותר
$M=(01010\dots)$ האיבר הגדול ביותר