אלגברה לינארית 2 (88113) – שאלון בחינה לדוגמא

מרצים: פרופ' רון עדין, פרופ' בוריס קוניאבסקי.
מתרגלים: עופר בוסאני, שירה גילת, עדי לוגסי, תמר נחשוני.

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.
*בבחינה שני פרקים. יש לענות על **כל השאלות** בפרק א' ועל **שתים מתוך שלוש השאלות** בפרק ב'.*
הניקוד על השאלות רשום בנפרד בכל פרק. נא לציין במפורש על אילו שאלות עניתם בפרק ב'.
נא לענות על כל שאלה בעמוד נפרד. ניתן לסמן עמודים כ"טיוטה".
נא להסביר ולנמק בבירור את כל התשובות.

בהצלחה!

פרק א'

יש לענות על שתי השאלות. הניקוד על כל שאלה הוא 20 נקודות.

1. יהי $V=\mathbb{R}^3$ (כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$).

א. נגדיר, לכל $(v_1,v_2,v_3),(w_1,w_2,w_3)\in V$:

$$\langle (v_1,v_2,v_3),(w_1,w_2,w_3)\rangle := 2v_1w_1-v_1w_2-v_2w_1+v_2w_2+v_3w_3$$

הוכיחו ש-$\langle\cdot,\cdot\rangle$ מכפלה פנימית על V.

ב. מצאו בסיס אורתונורמלי עבור V.

ג. יהיו $W_1=\operatorname{span}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$, $W_2=\operatorname{span}\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ תת-מרחבים ב-V.
מצאו את המשלימים הניצבים $W_3:=W_1^{\perp}$, $W_4:=W_2^{\perp}$ (ביחס למכפלה הפנימית הנ"ל).

ד. מצאו בסיסים אורתונורמליים עבור W_1, W_2, W_3, W_4.

ה. מצאו את ההטלה הניצבת של $v=(1,2,3)$ על כל אחד מ-W_i $(i=1,\dots,4)$.

2. יהי $V=\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית שהוגדרה בשאלה 1א. נגדיר אופרטור לינארי $T:V\to V$ ע"י

$$T(v_1,v_2,v_3):=(v_1-v_2,2v_1-v_2,v_3)\qquad(\forall v_1,v_2,v_3\in\mathbb{R})$$

א. בחרו בסיס אורתונורמלי עבור V, ורשמו את המטריצה המייצגת את T בבסיס זה.

ב. מצאו את האופרטור הצמוד T^* (רשמו נוסחה מפורשת עבור $T^*(v_1,v_2,v_3)$).

ג. האם T נורמלי? הרמיטי (צמוד לעצמו)? אנטי-הרמיטי (אנטי-צמוד לעצמו)? אורתוגונלי?

ד. מצאו את הפולינום האופייני ואת הפולינום המינימלי של T.

ה. האם T ניתן לשילוש? האם הוא ניתן ללכסון?

ו. האם T ניתן לשילוש אורתוגונלי? האם הוא ניתן ללכסון אורתוגונלי?

פרק ב'

יש לענות על שתים מתוך שלוש השאלות. הניקוד על כל שאלה הוא 30 נקודות.

3. הוכיחו, או תנו דוגמא נגדית, לכל אחד מהסעיפים הבאים.
   א. אם המטריצות $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ ניתנות ללכסון, אז גם $A+B$ ניתנת ללכסון.
   ב. אם מטריצה A ניתנת ללכסון אז $\operatorname{rank}(A^2)=\operatorname{rank}(A)$.
   ג. אם $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה הפיכה אז ניתן לכתוב את A^{-1} כפולינום ב-A עם מקדמים ממשיים.

4. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ עם בסיס $\{v_1,\dots,v_n\}$ $(n>1)$, ויהי $a\in\mathbb{R}$. נגדיר אופרטור לינארי $T:V\to V$ ע"י:

$$T(v_i)=v_{i+1}\quad(1\le i\le n-1)$$
$$T(v_n)=a^n v_1$$

   א. רשמו את המטריצה A המייצגת את T לפי הבסיס הנ"ל.
   ב. עבור אילו ערכים של a,n האופרטור T ניתן ללכסון?
   ג. עבור כל ערך של הזוג (n,a) שעבורו T ניתן ללכסון, מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש-$P^{-1}AP=D$ (כאשר A היא המטריצה מסעיף א').

5. יהי $V=\mathbb{C}^3$, עם המכפלה הסקלרית הרגילה, ויהי $W=\{(x,y,z)\in V\mid x+iy-z=0\}$.
   א. מצאו בסיסים אורתונורמליים עבור W ועבור המשלים הניצב $W^\perp$.
   ב. מצאו את ההטלות הניצבות של הווקטור $(1,0,0)\in V$ על W ועל $W^\perp$.
   ג. אם $P:V\to V$ היא ההטלה הניצבת על W, $Q:V\to V$ ההטלה הניצבת על $W^\perp$, הוכיחו: $(P-Q)^2=I$ (אופרטור הזהות).