מבנים אלגבריים להנדסה, 218-83, פתרון בוחן 3 תשפ"א

י' בתמוז ה'תשפ"א, 20.6.21

מרצה: פרופ' רון עדין.

מתרגל: אריאל ויצמן.

- מבנה הבוחן וניקוד: בבוחן חמישה סעיפים, כל סעיף שווה 20 נקודות. יש לענות על כל הסעיפים.
- הקפידו על סדר וניקיון.
- משך הבוחן: 80 דקות.
- חומר עזר: מחשבון.
- נמקו היטב את תשובותיכם!

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. (20 נק') תהיינה G חבורה ציקלית, H חבורה, ויהי $\varphi : G \to H$ הומ'. הוכיחו: $Im(\varphi)$ ציקלית.

פתרון:

לפי משפט האיזו' הראשון נקבל:

$$G/\ker(\varphi) \cong Im(\varphi)$$

לפי תרגיל משיעורי הבית מתקיים: חבורת מנה של חבורה ציקלית היא ציקלית. לכן אצלנו נקבל ש־ $G/\ker(\varphi)$ חבורה ציקלית, ולכן גם התמונה, שאיזומורפית לה, ציקלית.

2. (20 נק') יהי R חוג חילופי עם יחידה, ויהיו $a, b \in R$. הוכיחו או הפריכו: a, b הפיכים אם ורק אם ab הפיך.

פתרון :

$\Leftarrow$. נתון: a, b הפיכים, כלומר, קיימים a^{-1}, b^{-1} כך ש־ $aa^{-1} = bb^{-1} = 1$. נשים לב:

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = a1a^{-1} = aa^{-1} = 1$$

מחילופיות נקבל שגם $(b^{-1}a^{-1})(ab) = 1$, ולכן בסה"כ:

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

$\Rightarrow$: נתון ab הפיך. כלומר, קיים $c \in R$ כך ש־ $(ab)c = 1$, ומכאן: $a(bc) = 1$, ומחילופיות גם $(bc)a = 1$, מה שאומר bc הופכי של a ו־a הפיך. בדומה עבור b.

3. נתבונן בחוג הפולינומים מעל $\mathbb{R}$:

$$R = \mathbb{R}[x] = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \mid n \in \mathbb{N}, \forall k : a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

(א) (20 נק') נגדיר:

$$S = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_{2k} x^{2k} \mid n \in \mathbb{N}, \forall k : a_{2k} \in \mathbb{R} \right\}$$

הוכיחו: $S \leq R$ (כלומר, קבוצת הפולינומים שבהם לכל m אי־זוגי המקדם של x^m שווה לאפס היא תת־חוג של R).

(ב) (20 נק') האם $S \trianglelefteq R$ (כלומר, האם S אידאל של R)? נמקו.

(ג) נגדיר:

$$I=\left\{\sum_{k=2}^{n} a_{2k}x^{2k} \mid n\in\mathbb{N}, \forall k: a_{2k}\in\mathbb{R}\right\}$$

(כלומר, קבוצת הפולינומים שבהם לכל m אי־זוגי או קטן מ־4 המקדם של x^m שווה לאפס).

i. (6 נק') הוכיחו: $I\leq S$ (כלומר, I תת־חוג של S).

ii. (7 נק') האם $I\trianglelefteq S$ (כלומר, האם I אידאל של S)? נמקו.

iii. (7 נק') האם $I\trianglelefteq R$ (כלומר, האם I אידאל של R)? נמקו.

פתרון :

א. תת־חבורה חיבורית: כמובן, $0\in S$. יהיו $a=\sum_{k=0}^{n} a_{2k}x^{2k}, b=\sum_{k=0}^{m} b_{2k}x^{2k}\in S$, אזי:

$$a-b=\sum_{k=0}^{\max\{n,m\}}(a_{2k}-b_{2k})x^{2k}\in S$$

כאשר "מרפדים" באפסים את הטור הקצר.

סגירות לכפל:

$$ab=\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right)x^k$$

כעת, עבור k אי־זוגי אז לכל i אחד מ־ $i, k-i$ הוא אי־זוגי, ולכן $a_i=0\vee b_{k-i}=0$. בסה"כ קיבלנו שהמקדם של x^k הוא סכום של אפסים, ולכן 0 כדרוש.

ב. לא, הרי עבור $x\in R, x^2\in S$ נקבל $x\cdot x^2=x^3\notin S$ ולכן אין בליעה וזה לא אידאל.

ג. 1) הוכחה דומה, המקדם המינימלי השונה מאפס מתקבל ממכפלת המקדמים המינימליים.

2) כן: לגבי המקדם המינימלי השונה מאפס, הוא מתקבל ממכפלת המקדמים המינימליים, ולכן הוא של x^4 לכל הפחות. לגבי הזוגיות, בדיוק כמו בסעיף א.

3) לא: עבור $x\in R, x^4\in I$ נקבל $x\cdot x^4=x^5\notin I$.