בוחן 1 מבנים אלגבריים הנדסה תשעח

26.11.2017

מתרגל: אחיה בר־און.

- ענו על 3 מתוך 4 שאלות.
- **כתבו בדף הראשון של המחברת את הת.ז. שלכם בצורה ברורה.**
- הקפידו על סדר ניקיון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- נמקו כל תשובה.
- כל שאלה 34 נקודות.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות אותן אתם יודעים לפתור.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות עליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

1	
2	
3	
4	
total	

בהצלחה!

.1

(א) [18 נק'] נגדיר $a=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&6&5&4&3\end{pmatrix}\in S_6$

i. כיתבו את a,b כמכפלה של מחזורים זרים.

פתרון: $a=(1\,6)\,(2\,5)\,(3\,4), b=(1\,2)\,(4\,5)\,(3\,6)$

ii. כמה תמורות $x\in S_6$ קיימות המקיימות את השיוון $ax=b$? מצאו אותן.

פתרון: נכפיל את השיוון ב a^{-1} משמאל ונקבל כי קיים x יחיד כזה שהוא $x=a^{-1}b$. חישוב מפורש

$$x=a^{-1}b=ab=(1\,5\,3)\,(2\,6\,4)$$

(ב) [16 נק'] תהא $\sigma\in S_n$ ויהא $\sigma=\tau_1\cdots\tau_m$ הפירוק למחזורים זרים. הוכיחו כי $o(\sigma)=lcm\left\{o(\tau_i)\right\}_{i=1}^{m}$.
(תזכורת: ה lcm (הכפולה המשותפת המינימאלית) של המספרים הטבעיים $a_1,\ldots,a_n$ הוא מספר טבעי d המקיים: 1) $d|a_i$ לכל $1\le i\le n$, ובנוסף: 2) לכל מספר טבעי d' המקיים $d'|a_i$ לכל $1\le i\le n$, מתקיים כי $d|d'$. למשל, $lcm\{2,8,20,10\}=40$).

פתרון: נסמן $d=lcm\left\{o(\tau_i)\right\}$ אזי $\sigma^d=\tau_1^d\cdots\tau_m^d=id$

. בנוסף, אם $\sigma^k=\tau_1^k\cdots\tau_m^k=id$ אזי לכל i מתקיים $\tau_i^k=id$(כי המחזורים זרים) ולכן $o(\tau_i)|k$ ולכן $lcm\left\{o(\tau_i)\right\}|k$ בפרט קטן שווה לו.

.2

(א) [14 נק'] קבעו עבור כל אחת מהקבוצות והפעולות הבאות האם היא חבורה. במידה שמדובר בחבורה, מצאו את ההופכי של כל איבר.

i. המטריצות $G=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}|\,0<a\in\mathbb{R},\,b\in\mathbb{R}\right\}$, עם פעולת כפל מטריצות רגיל.

פתרון : זוהי חבורה.

סגירות: לכל $\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a'&b'\\0&a'\end{pmatrix}\in G$ מתקיים כי $\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'&b'\\0&a'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aa'&ab'+ba'\\0&aa'\end{pmatrix}$
וכיוון ש $0<a,a'$ גם $0<aa'$ (וכמובן ש $ab'+ba'\in\mathbb{R}$) נקבל כי הכפל שייך ל G.

קיבוציות: כפל מטריצות הוא קיבוצי ובפרט כפל מטריצות מ G.

יחידה: מטריצת היחידה $I_2\in G$ כי עבור $a=1>0,\ b=0$ נקבל כי $I=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$.

הופכי: עבור מטריצה $\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\in G$ ההופכית שלה (היא קיימת כי הדט' שלה שווה $a^2\neq 0$) היא $\frac{1}{a^2}\begin{pmatrix}a&-b\\0&a\end{pmatrix}\in G$ (כי $0<\frac{1}{a},\ \frac{-b}{a}\in\mathbb{R}$). הוכחה:

$$\frac{1}{a^2}\begin{pmatrix}a&-b\\0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}=\frac{1}{a^2}\begin{pmatrix}a^2&0\\0&a^2\end{pmatrix}=I$$

ii. הטבעיים $G=\mathbb{N}$, עם הפעולה $a*b=a^b$.

פתרון : זה אפילו לא אגודה כי $2=2*1=2*(1*2)\neq(2*1)*2=2*2=4$

(ב) [6 נק'] כמה יוצרים יש ל $\mathbb{Z}_6=\{\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5}\}$ (עם פעולת חיבור מדולו 6)?

פתרון: ברור כי $\mathbf{1}$ יוצר. לפי ?? גם $\mathbf{5}=-\mathbf{1}$ יוצר. בנוסף כל השאר אינם יוצרים כי $1\cdot\mathbf{0}=3\cdot\mathbf{2}=2\cdot\mathbf{3}=3\cdot\mathbf{4}=\mathbf{0}$ ולכן הסדרים שלהם קטנים מ־6.

(ג) [14 נק'] הוכיחו/הפריכו כי H היא ת"ח של G במקרים הבאים:

i. $G = \mathbb{C} \supseteq \{a+ai \mid a \in \mathbb{R}\} = H$ (הפעולה היא חיבור מספרים מרוכבים).
פתרון : ת"ח כי $a+ai, b+bi \in H$ אזי $(a+ai)-(b+bi) = a-b+(a-b)i \in H$ בנוסף איבר היחידה $0 \in H$ (הוא מתקבל אם ניקח $a=0$)

ii. $G = \mathbb{F}^{n\times n} \supseteq \{A \in \mathbb{F}^{n\times n} \mid \det(A) \neq 0\} = H$ (הפעולה היא חיבור מטריצות).
פתרון : לא ת"ח כי $I, -I \in H$ אבל $I - I = 0 \notin H$

3. תזכורת: המרכז של חבורה G מוגדר כך: $Z(G) = \{x \in G | \forall g \in G:\ gx = xg\}$.

(א) [17 נק'] תהיינה G_1, G_2 חבורות. הוכיחו/הפריכו כי $Z(G_1 \times G_2) = Z(G_1) \times Z(G_2)$.

(ב) [17 נק'] חשבו מפורשות את $Z(\mathbb{R} \times S_5)$ [כאשר $\mathbb{R} \times S_5$ היא חבורת המכפלה עם הפעולה המוגדרת כך: לכל $(x,\sigma), (x',\sigma') \in \mathbb{R} \times S_5$ הפעולה ביניהם היא $(x,\sigma)(x',\sigma') = (x+x', \sigma \circ \sigma')$].

4.

(א) [17 נק'] תהא G חבורה בה מתקיים $\forall g_1, g_2 \in G : (g_1g_2)^2 = g_1^2g_2^2$.
הוכיחו כי G חבורה קומוטטיבית.
פתרון : יהיו $g_1g_2 \in G$. לפי נתון מתקיים

$$g_1(g_2g_1)g_2 = (g_1g_2)(g_1g_2) = (g_1g_2)^2 = g_1^2g_2^2 = g_1(g_1g_2)g_2$$

נכפיל את השיוויון ב g_1^{-1} משמאל וב g_2^{-1} מימין ונקבל כי $g_2g_1 = g_1g_2$.

(ב) [17 נק'] תהא G חבורה בה מתקיים $\forall g \in G : g^2 = e$.
הוכיחו כי G חבורה קומוטטיבית.
פתרון : לכל $g_1g_2 \in G$. לפי נתון מתקיים

$$(g_1g_2)^2 = e = e^2 = g_1^2g_2^2$$

ולכן לפי סעיף קודם היא קומטטיבית.