תרגיל 4

שאלה 1

1. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים. נתון ש־

$$M_i = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(i)}(x)| < \infty \quad , \quad i = 0,1,2.$$

(א) הבע את $f(a+t),\ f(a-t)$ בעזרת פיתוח טיילור מסדר 1 סביב נקודה $a \in \mathbb{R}$ כלשהי, והוכח כי $2M_1 t \le 2M_0 + M_2 t^2$ לכל t.

(ב) הסק מכך ש־ $M_1^2 \le 2M_0 M_2$.

2. תהי $f(x)$ פונקציה בעלת נגזרת שלישית רציפה בקטע $[-1,1]$ המקיימת:
$f'(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(0) = f(-1) = 0$.
הוכח כי קיימת נקודה c בקטע $[-1,1]$ עבורה $f^{(3)}(c) \ge 3$.

שאלה 2

1. העזר בפיתוח טיילור של הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x}$ על מנת לחשב את $\sqrt[3]{30}$ כך שהשגיאה בערכה המוחלט לא תעלה על $5 \cdot 10^{-4}$.

2. העזר בפיתוח מקלורן מסדר מתאים על מנת לחשב את הגבול

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \cos x - (x+1)}{\tan x - \sin x}$$

בהנאה!