מתרגלים: ליאור דקל ואדם צ'פמן

טרנספורמציה של מ"מ דו-מימדיים

שאלה

יהיו X_1, X_2 מ"מ ב"ת. נגדיר מ"מ אחרים $Y_1 = X_1 + X_2,\ Y_2 = X_1 - X_2$.
מצא את הצפיפות המשותפת $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$ כאשר:

א. המ"מ X_1, X_2 בעלי התפלגות אחידה $X_1, X_2 \sim U[0,1]$.

ב. המ"מ X_1, X_2 בעלי התפלגות מעריכית $X_1 \sim Exp(\lambda_1), X_2 \sim Exp(\lambda_2)$.

פתרון:

בשני הסעיפים נעזר בנוסחת הטרנספורמציה $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = |J|^{-1} f_{X_1,X_2}\left(g_1^{-1}(y_1, y_2), g_2^{-1}(y_1, y_2)\right)$.

נמצא את הפונקציות ההפכיות מהנתונים:

$$y_1 = x_1 + x_2 = g_1(x_1, x_2) \qquad \Rightarrow \qquad g_1^{-1}(y_1, y_2) = x_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$
$$y_2 = x_1 - x_2 = g_2(x_1, x_2) \qquad \Rightarrow \qquad g_1^{-1}(y_1, y_2) = x_2 = \frac{y_1 - y_2}{2}$$

נחשב את דטרמיננטת היעקוביאן של הטרנספורמציה:

$$J(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

נציב בנוסחת הטרנספורמציה ונקבל את נוסחת הצפיפות:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{|-2|} f_{X_1,X_2}\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right) = \frac{1}{2} f_{X_1,X_2}\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right)$$

א) מכיוון ש- X_1, X_2 מתפלגים אחידה, אזי $(0 \le x \le 1)$ $f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = 1$

לכן, $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{2} f_{X_1,X_2}\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

התחומים: $0 \le x_1, x_2 \le 1 \quad \Rightarrow 0 \le y_1 + y_2 \le 2,\ \ 0 \le y_1 - y_2 \le 2$

מקבלים:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ,0 \le y_1 + y_2 \le 2,\ \ 0 \le y_1 - y_2 \le 2 \\ 0 & ,else \end{cases}$$

ב) מכיוון ש- X_1, X_2 מתפלגים מעריכית, אזי

$$f_{X_1}(x) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x},\ f_{X_2}(x) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} \qquad (0 \le x_1, x_2)$$

לכן,

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{2} f_{X_1,X_2}\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\lambda_1 e^{-\lambda_1\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)}\right] \cdot \left[\lambda_2 e^{-\lambda_2\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)}\right]$$

$$= \begin{cases} \frac{\lambda_1\lambda_2}{2} e^{-\left[\lambda_1\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)+\lambda_2\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]} & , y_1+y_2 \ge 0, y_1-y_2 \ge 0 \\ 0 & , else \end{cases}$$