תרגיל 11 אנליזה למורים

1 בפברואר 2017

שאלה 1

מצאו את הנגזרת הבאה:

$$sin\left(2\cdot x\right)+\left(ln\left(x\right)\right)^{\frac{3}{2}}$$

שאלה 2

$$cos\left(ln\left(2\cdot x\right)\right)+9$$

שאלה 3

מצאו את הנגזרת של הפונקציה הבאה:

$$cos\left(sin\left(x\right)+e^{x}\right)+4$$

שאלה 4

תהי פונקציה:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{sin\left(3\cdot x^{2}\right)}{x} & x\neq0\\ \\ 0 & x=0\end{cases}$$

מצאו את הנגזרת בנקודה 0

שאלה 5

חשבו את הנגזרת של הפונקציה הבאה:

$$\left(ln\left(x\right)\right)^{sin(x)+e^{x}}$$

שאלה 6

הוכיחו כי קיימת נקודה c עבורה מתקיים:

$$\frac{1}{ln^{2}(c^{2}+1)+1}+\frac{1}{e^{2\cdot c}+1}=-7\cdot c^{3}+2\cdot c+2$$

הדרכה:

על מנת להוכיח שקיים פתרון למשוואה, אנו נוהגים להעביר אגף ולקבל ביטוי מתאפס, כלומר משוואה מהצורה: $h\left(c\right)=0$. כלומר, אם נוכיח שקיימת נקודה שמאפסת את הפונקציה $h\left(x\right)$, הוכחנו שקיים פתרון למשוואה.

במקרה זה:

$h\left(x\right)=(?)$

(שימו לב: המשתנה הוא x ולא c. הנקודה c היא הפתרון שעלינו להוכיח שקיים)

כיוון שהפונקציה $h\left(x\right)$ רציפה בכל המספרים הממשים, מספיק למצוא נקודה בה הפונקציה $h\left(x\right)$ שלילית ונקודה בה היא חיובית, ואז לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה בה היא מתאפסת. בנוסף, כיוון שאנו לא נוהגים לחפש נקודות כאלה באופן אקראי, נשתמש בחקירה על מנת להוכיח שקימות נקודות כאלה.

בתרגיל זה, מספיק לחשב את הגבולות הבאים:

$lim_{x\rightarrow\infty}h\left(x\right)=(?)$

$lim_{x\rightarrow\infty}h\left(x\right)=(?)$

לכן בהכרח קיימת נקודה בה הפונקציה היא שלילית וקיימת נקודה בה הפונקציה חיובית, ולכן לפי משפט ערך הבינים קיימת נקודה c בה הפונקציה מתאפסת.

שאלה 7

תהי פונקציה $f\left(x\right)$ הרציפה בכל המספרים הממשיים. נניח בנוסף כי $f\left(x\right)$ מחזורית בעלת מחזור t, כלומר לכל x מתקיים:

$f\left(x\right)=f\left(x+t\right)$

הוכיחו כי קיימת נקודה c עבורה:

$f\left(c\right)=f\left(c+\frac{t}{2}\right)$

פתרון:

על מנת להוכיח שקיים פתרון למשוואה, אנו נוהגים להעביר אגף ולקבל ביטוי מתאפס, כלומר משוואה מהצורה: $h\left(c\right)=0$.

כלומר, אם נוכיח שקיימת נקודה שמתאפסת את הפונקציה $h\left(x\right)$ הוכחנו שקיים פתרון למשוואה.

במקרה זה:

$h(x) = (?)$

כמובן שהפונקציה h רציפה כסכום של שתי פונקציות רציפות. כיון שהפונקציה מחזורית, נובע כי

$f(0) = f(t)$, ולכן עבור הנוקדה (כתבו תשובה באמצעות t):

$a = (?)$

מתקיים כי

$h(a) = -h(0)$

אם $h(0) = 0$ מצאנו נקודה בה הפונקציה h מתאפסת וסיימנו.

אחרת, מצאנו שתי נקודות עם סימנים מנוגדים, ולכן לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה cבה הפונקציה h מתאפסת.

שאלה 8

תהי הפונקציה $f(x)$ הרציפה בכל המספרים הממשיים. הוכיחו כי קיים פתרון למשוואה $f(x) = x$ אם ורק אם קיים פתרון למשוואה $f(f(x)) = x$.

הדרכה:

(הערה: בתשובות המלאות לאחר ההגשה הסופית, אנו מרחיבים על פתרון התרגיל).

על מנת להוכיח טענת אם ורק אם, עלינו להוכיח בשני הכיוונים.

בכיוון הראשון (הכיוון הקל), נתון כי קיים פתרון למשוואה $f(x) = x$, שנסמנו באות c.

כלומר, נתון כי $f(c) = c$.

נפעיל את הפונקציה f על שני אגפי המשוואה, נשתמש שוב בנתון, ונקבל כי הנקודה d היא פתרון למשוואה $f(f(x)) = x$, כאשר

$d = (?)$

בכיוון ההפוך, נתון כי קיים פתרון למשוואה $f(f(x)) = x$ נסמנו באות a.

כלומר, נתון כי $f(f(a)) = a$.

עלינו למצוא פתרון t למשוואה מהצורה:

$h(t) = 0$

כלומר, אם נוכיח שקיימת נקודה שמאפסת את הפונקציה $h(x)$. הוכחנו שקיים פתרון למשוואה.

במקרה זה:

$h\left(x\right)=(?)$

כמובן שהפונקציה h רציפה כסכום של שתי פונקציות רציפות.

מספיק למצוא שתי נקודות בהן h מקבלת סימנים מנוגדים, ואז לפי משפט ערך הביניים היא מתאפסת ביניהן.

נזכור כי נתון $f\left(f\left(a\right)\right)=a$.

ואכן, עבור הנקודה:

$b=(?)$ מתקיים כי

$h\left(a\right)=-h\left(b\right)$

אם $h\left(a\right)=0$, מצאנו נקודה בה הפוקנציה h מתאפסת וסיימנו.

אחרת מצאנו שתי נקודות עם סימנים מנוגדים, ולכן לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה t בה הפונקציה hמתאפסת.

שאלה 9

תהי $f\left(x\right)$ הרציפה בקטע הסגור $[0,1]$, המקיימת $f\left(0\right)=f\left(1\right)$. הוכיחו כי לכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת נקודה c כך ש־

$f\left(c\right)=f\left(c+\frac{1}{n}\right)$.

הדרכה:

יהי $n\in\mathbb{N}$.

כהרגלנו, נעביר אגף ונביט הפוקנציה

$h\left(x\right)=f\left(x\right)-f\left(x+\frac{1}{n}\right)$

הפונקציה h כמובן רציפה כסכום של פונקציות רציפות.

נביט בערכים:

$f\left(0\right),f\left(\frac{1}{n}\right),f\left(\frac{2}{n}\right),...,f\left(\frac{n-1}{n}\right),f\left(1\right)$

אם קיים $0\leq k<n$ כך ש

$f\left(\frac{k}{n}\right)=f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

סיימנו, כי הנקודה c מקיימת $f\left(c\right)=f\left(c+\frac{1}{n}\right)$ עבור

$c=(?)$

אחרת, לכל $0 \le k < n$ מתקיים כי

$$f\left(\frac{k}{n}\right) < f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

אם סדרת הערכים תמיד עולה

$$f(0) < f\left(\frac{1}{n}\right) < f\left(\frac{2}{n}\right) < .. < f\left(\frac{n-1}{n}\right) < f(1).$$

נקבל כי $f(0) < f(1)$ בסתירה לנתון.

באופן דומה, לא ייתכן כי הסדרה תמיד יורדת.

לכן קיים $0 \le k < n-1$ עבורו

$$f\left(\frac{k}{n}\right) < f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

וגם

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) > f\left(\frac{k+2}{n}\right)$$

כלומר, יש עלייה מיד לאחריה ירידה.

(במקרה ההפוך, בו יש ירידה ומייד לאחריה עליה, ההוכחה דומה)

לכן, מתקיים כי

$$h(a) < 0$$

$$h(b) > 0$$

עבור הנקודת

$$a = (?)$$

$$b = (?)$$

ולכן לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה בה h מתאפסת, כפי שרצינו.

שאלה 01

תהי f פונקציה גזירה בקטע $[0,1]$כך ש$f(1) = 0$ וכמו כן, לכל $x \in (0,1)$מתקיים $f(x) \neq 0$.

בוכיחו כי קיימת נקודה $c \in (0,1)$ כך ש:

$$c = -\frac{f(c)}{f'(c)}$$

רמז: הביטוי בפונקציה $g(x) = x \cdot f(x)$.

הדרכה:

ראשית נשים לב כי הפונקציה g גזירה בקטע $[0,1]$ כמכפלה של גזירות, ולכן גם רציפה

שם.

שנית, נשים לב כי:

$g\left(0\right)=g\left(1\right)=(?)$

לכן לפי משפט רול קיימת נק' $c\in\left(0,1\right)$ עבורה מתקיימת המשוואה:

(רשמו את התשובה במפורש עם הפונקציה f וללא הפונקציה g)

בנוסף, נשים לב שלפי משוואה זו, אם $f^{'}\left(c\right)=0$ נובע כי **(להסביר מה נובע)**

וזו סתירה לנתון.

לכן אפשר לחלק את המשוואה שקיבלנו ב$f^{'}\left(c\right)$, להעביר אגף ולקבל את מה שרצינו להוכיח.

תרגיל 11

הוכיחו כי אי שיוויון הבא מתקיים לכל x חיובי

$\frac{cos(2\cdot x)+x^{7}+2x^{2}-1}{x}\leq-2\cdot sin\left(2\cdot x\right)+7\cdot x^{6}+4\cdot x$

פתרון:

נוכיח אי שיוויון זה באמצאות משפט לגראנג' .

נביט בפונקציה $h\left(x\right)=cos\left(2\cdot x\right)+x^{7}+2\cdot x^{2}-1$. זו פונקציה גזירה ורציפה בכל הממשיים.

תהי נקודה x חיובית כלשהיא, נפעיל את משפט לגראנז' על הפונקציה h בקטע $[0,x]$.

לכן קיימת נקודה $c\in\left(0,x\right)$ עבורה מתקיים:

(רשמו תשובה במפורש, ללא שימוש ב־h).

$h^{'}\left(c\right)=(?)$

כעט נמצא את הערך המקסימלי של הפונקציה $h^{'}$בקטע $[0,x]$ ונקבל אי שיוויון.

נגזור את $h^{'}$ ונשים לב לכך שבקטע $[0,x]$ מתקיים $h^{''}\geq0$.

מכאן ניתן להסיק להערך המקסימלי של הפונקציה $h^{'}$ בקטע $[0,x]$.

הינו: **(לכתוב את הערך המקסימלי)**

ולכן הוכנו את אי השיוויון.

תרגיל 21

מצאו כמה פתרונות יש למשוואה הבאה:

$e^x - 6 = x \cdot ln(x) - x + e$

בתחום $[1, \infty)$

הדרכה:

ראשית נעביר אגף ונביט בפונקציה

$h(x) = -x \cdot ln(x) + e^x + x - e - 6$

עלינו לקבוע בכמה נקודות בתחום הפונקציה $h(x)$ מתאפסת.

כאשר איננו יודעים לפתור את המשוואה, על מנת לקבוע מתי הפונקציה חותכת את ציר x, נחקור את הפונקציה לתחומי עלייה וירידה, ונקודות קיצון.

כלומר, עלינו לקבוע מתי $h^{'}(x)$ חיובית, ומתי היא שלילית. לכן, עלינו למצוא את הנקודות בהן הנגזרת מתאפסת:

$h^{'}(x) = e^x - ln(x) = 0$.

שימו לב:

על מנת לדעת מתי הפונקציה h מתאפסת, אנחנו בעצם צריכים לגלות מתי הנגזרת שלה מתאפסת.

אבל זו עדיין משוואה שאנחנו לא יודעים לפתור.

לכן נחקור את הנגזרת:

לפי הנתונים, אנו מסיקים כי הסימוס של $h^{'}(d)$ הוא:

(רשמו את הסימן)

באופן דומה, נפעיל את משפט לגראנז' על הפוקנציה h בקטע $[c, b]$ ונקבל שקיימת נקודה $e \in (c, b)$ עבורה :

$h^{'}(e) = (?)$

ולפי הנתונים, נסיק כי הסימן של $h^{'}(e)$ הוא: **(לרשום את הסימן)**

שלב שני:

נפעיל את משפט לגראנז' על הנגזרת של h בקטע $[d, e]$ ונקבל שקיימת נקודה $t \in (d, e)$

כך שמתקיימת המשוואה: **(לכתוב את המשואה)**

נובע כי הסימן של $h^{''}(t)$ הוא: **(לכתוב את הסימון)**

שלב שלישי

הפונקציה g הינה פונקציה של רק ישר ולכן

$$g^{''}\left(x\right)=(?)$$

ולכן

$$h^{''}\left(x\right)=(?)$$

קל לראות שבתחום $[1,\infty)$ מתקיים כי $h^{''}\left(x\right)\geq(?)$

ולכן הפונקציה $h^{'}\left(x\right)$מונוטונית עולה בתחום.

אבל מתקיים כי $h^{'}\left(1\right)=(?)$

וכיוון שהפונקציה עולה בתחום, מתקיים בתחום כי $h^{'}\left(x\right)\geq(?)$

ולכן הפונקציה עולב בתחום, מתקיים בתחום כי

$$h^{'}\left(x\right)\geq(?)$$

ולכן הפונקציה $h\left(x\right)$ מונוטונית עולה ממש בתחום.

לכן, הפונקציה $h\left(x\right)$ מתאפסת לכל היותר פעם אחת בתחום.

הפונקציה $h\left(x\right)$ רציפה בתחום כצירוף של פונקציות אלמנטריות בתחום הגדרתן.

לכן, לפי משפט ערך הביניים, על מנת להוכיח שקיים לפחות שורש אחד לפונקציה, מספיק למצוא נקודה בה הפונקציה שלילית, ונקודה בה הפונקציה חיובית.

רשמו בקבוצה שתי נקודות מתאימות:

$\{a,b\}$ ולכן סה"כ הוכחנו שקיים פתרון למשוואה.

תרגיל 31

תהיינה שתי פונקציות f,g הגזירות בקטע A, כך שלכל $x\in A$ מתקיים $f^{'}\left(x\right)\geq g^{'}\left(x\right)$.

א) הוכיחו או הפריכו: לכל $x\in A$ מתקיים כי $f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$.

ב) נתון בנוסף כי קיים $a\in A$ עבורו $f\left(a\right)=g\left(a\right)$, הוכיחו כי לכל $a\leq x\in A$ מתקיים כי

$f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$.

הדרכה:

נביט בפונקציות הקבועות:

$$f\left(x\right)=(?)$$

$$g\left(x\right)=(?)$$

ברור כי

$$f^{'}(x) = g^{'}(x) = (?)$$

אך $f(x) < g(x)$

סעיף ב'

נעביר אגף ונביט בפונקציה $h(x) = f(x) - g(x)$

עלינו להוכיח כי לכל $a \leq x \in A$ מתקיים כי $h(x) \geq 0$.

נגזור את הפונקציה, ולפי הנתון ברור כי לכל $x \in A$ מתקיים

$$h^{'}(x) \geq (?)$$

לפי משפט למדנו בכיתה, נובע שהפונקציה h מונוטונית עולה בקטע A.

כעת, נציב את הנקודה a ונקבל

$$h(a) = (?)$$

ביחד, לכל $a \geq x$ מתקיים $h(x) \geq h(a)$ ולכן

$$h(x) \geq (?)$$