פתרון תרגיל 8

1.א. ראיתם בתרגיל הקודם כי המטריצה המייצגת היא

$$A=[T]_s^s=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$p_T(\lambda)=\lambda^3(\lambda-1)$$

ולכן לפי המשפט הפירוק הפרמרי :

$$\mathbb{R}_3[x]=kerT^3\oplus ker(T-I)$$

נחשב ונקבל:

$$kerT^3=N(A^3)=N\left(\begin{pmatrix}1&1&2&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right)=\cdots=span\left\{\begin{pmatrix}-6r-2s-t\\t\\s\\r\end{pmatrix}\right\}$$

$$=span\left\{\begin{pmatrix}-6\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$ker(T-I)=N(A-I)=N\left(\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right)....=span\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ב.

$$T(a,b,0)=span\{T(1,1,0)\}=span\{(2,1,0)\}\subseteq U$$

ג.

$$T(U)=span\{T(1,0,0),T(0,1,0)\}=span\{(1,3,0),(2,4,0)\}\subseteq U$$

2. ראשית נמצא את המטריצה המייצגת של ההעתקה לפי הבסיס הסטנדרטי.

$$[T]_s^s=\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\2&1&0&0&0\\0&0&2&1&0\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&3\end{pmatrix}$$

נחשב את הפולינום האופייני ונקבל

$$p_T(x)=(x-2)^2(x+1)(x-3)^2$$

נחשב גם את הפולינום המינימלי (תוודאו שאתם יודעים כיצד) ונקבל

$$m_T(x)=(x-2)^2(x+1)(x-3)$$

כעת לפי המשפט נקבל כי $\mathbb{R}^5=ker(T-2I)^2\oplus ker(T+I)\oplus ker(T-3I)$

נחשב:

- $ker((T-2I)^2)=N\left(\begin{pmatrix}-1&2&0&0&0\\2&-1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}^2\right)=$

$N\begin{pmatrix}5&-4&0&0&0\\-4&5&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=span\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\}$

- $ker((T+I)\quad)=N\left(\begin{pmatrix}2&2&0&0&0\\2&2&0&0&0\\0&0&3&1&0\\0&0&0&3&1\\0&0&0&0&4\end{pmatrix}\right)=span\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\}$

- $ker((T-3I)\quad)=N\left(\begin{pmatrix}-2&2&0&0&0\\2&-2&0&0&0\\0&0&-1&1&0\\0&0&0&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\right)=span\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\}$

3. נשים לב שהריבוי האלגברי של 1 הוא 1, הריבוי האלגברי של 2 הוא גם 1 והריבוי האלגברי של 4 הוא 2.
ולכן, 1 ו-2 יופיעו פעם אחת באלכסון ו4 יופיע פעמיים.
נבדוק את מספר הבלוקים עם הערך העצמי 4 וכך נדע מה היא צורת הז׳ורדן.
נשים לב כי $dim\big(N(A-I)\big)=1$ ולכן יש בלוק אחד עם הערך העצמי 4 ולכן צורת הז׳ורדן היא:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&4&1\\0&0&0&4\end{pmatrix}$$

4. נחשב ונקבל כי

$$A^2=\begin{pmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&1&0\\0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&1&0\\0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2&2\lambda&1&0\\0&\lambda^2&2\lambda&1\\0&0&\lambda^2&2\lambda\\0&0&0&\lambda^2\end{pmatrix}$$

למטריצות דומות יש אותם ע״ע. כיוון ש λ הוא ע״ע עצמי יחיד של שA ו λ^2 הוא ערך עצמי יחיד של A^2 אזי אם הן דומות צריך להתקיים $\lambda^2=\lambda$
זה מתקיים רק אם $\lambda=0,1$
נבדוק אם במקרים האלו המטריצות דומות.
אם $\lambda=0$ אזי

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ומתקיים שהפולינום המינמלי שלה $m_{A^2}(\lambda)=\lambda^3$
אבל ידוע ש$m_A\ (\lambda)=\lambda^4$ ולכן הן לא דומות.

אם $\lambda = 1$ אזי

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ומתקיים שהפולינום המינמלי שלה $m_{A^2}(\lambda) = (\lambda - 1)^4$ ולכן בצורת ז׳ורדן של A^2 יש בלוק מגודל 4 ולכן נקבל שצורת זורדן של A^2 היא A ונקבל שהן דומות.

5.

ב. נגדיר את S להיות $S=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & A_n^{-1} \end{pmatrix}$

לפי סעיף א׳ נקבל כי $AS = \begin{pmatrix} A_1A_1^{-1} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & A_nA_n^{-1} \end{pmatrix} = I$

ולכן $A^{-1} = S$

ג. *תהי* $A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & A_n \end{pmatrix}$ מטריצה בלוקים אלכסונית כך ש- $\forall i: A_i$ לכסין צריך להוכיח ש- A לכסינה. כיוון ש- $\forall i: A_i$ לכסין קיימות מטריצות P_i- כך ש- $\forall i: A_i = P_i^{-1}D_i\, P_i$ ולכן

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^{-1}D_1\, P_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & P_n^{-1}D_n\, P_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} P_1^{-1} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & P_n^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & D_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & P_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & P_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & D_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & P_n \end{pmatrix}$$

מכאן ש-A לכסינה

6. ראיתם שלמטריצה ניל׳ יש ערך עצמי בודד $\lambda = 0$ ולכן $p_A(\lambda) = \lambda^7$

ולכן $m_A(\lambda) = \lambda^k$ כאשר $k \in \{3,4,5,6,7\}$ כי $A^2 \neq 0$.

ולכן נקבל:

חזקה בפולינום המינימלי *(גודל הבלוק הכי כדול)*	ריבוי גאומטרי *(כמה בלוקים יש לע״ע)*	ריבוי אלגברי*(כמה פעמים הע״ע מופיע באלכסון)*	λ
k	*7-4=3*	7	*0*

נחלק למקרים:

__k=3:__

נקבל כי גודל הבלוק הכי גדול הוא 3 ולכן יש 2 אופציות:

$$J_3(0) \oplus J_3(0) \oplus J_1(0)$$

או

$J_3(0)\oplus J_2(0)\oplus J_2(0)$

K=4:
נקבל כי גודל הבלוק הכי גדול הוא 4 ולכן יש אופציה אחת:
$J_4(0)\oplus J_2(0)\oplus J_1(0)$

k=5:
נקבל כי גודל הבלוק הכי גדול הוא *5* ולכן יש אופציה אחת:
$J_5(0)\oplus J_1(0)\oplus J_1(0)$

ונשים לב כי עבור *k=6,7* לא נוכל להגיע ל3 בלוקים ולכן זאת לא אופציה.