(1)

<u>משפט רושה</u>: יהיו f ו-g פונקציות אנליטיות בתחום R ותהי γ עקומה סגורה ופשוטה המוכלת יחד עם הפנים שלה בתחום R.
נניח כי לכל $z \in \gamma$ מתקיים

$$|f(z)| > |g(z)| , \quad z \in \gamma$$

אז ל-f ו-$f+g$ יש אותו מספר אפסים של γ, כאשר כל אפס נספר לפי סדרו.

<u>תרגיל</u>: כמה אפסים יש לפולינום
$p(z) = 2z^5 + 4z^2 + 1$ בעיגול היחידה $|z|<1$?

<u>פתרון</u>: נגדיר $f(z) = 4z^2$ ו-$g(z) = 2z^5 + 1$
כאשר $|z| = 1$ נקבל $|f(z)| = 4 > 3 \geq |g(z)|$
(כי $|g(z)| = |2z^5+1| \leq 2|z|^5 + 1 = 3$)
לכן לפי משפט רושה, ל-f ו-$f+g$ יש אותו מספר אפסים בעיגול $|z|<1$. כיוון של-f יש שני אפסים בעיגול $|z|<1$ אז גם ל-p יש שני אפסים בעיגול $|z|<1$.

<u>תרגיל</u>: כמה אפסים יש לפונקציה
$f(z) = 3z^{100} - e^z$ בעיגול $|z|<1$ והאם האפסים הם אפסים פשוטים?

<u>פתרון</u>: נגדיר $f_1(z) = 3z^{100}$ ו-$f_2(z) = -e^z$

(2) אם $|z|=1$ אז נסמן $z=e^{i\theta}$ ולכן

$$|f_2(e^{i\theta})| = |e^{e^{i\theta}}| = |e^{\cos\theta + i\sin\theta}|$$

$$= e^{\cos\theta} \le e$$

ולכן $|f_2(z)| = e < 3 = |f_1(z)|$ כאשר $|z|=1$. לכן ל-f_1 ו-f_2 יש אותו מספר אפסים בעיגול $|z|<1$, כלומר 100 אפסים.

כעת נראה שכל האפסים הם פשוטים. אם ξ הוא אפס של f אז $e^{\xi} = 3\xi^{100}$ ולכן

$$f'(\xi) = 300\xi^{99} - e^{\xi}$$

$$= 300\xi^{99} - 3\xi^{100} = 3\xi^{99}(100-3\xi)$$

ולכן אם $f'(\xi)=0$ אז $\xi=0$ או $100-3\xi=0$, כלומר $\xi = 33\frac{1}{3}$.

אם $\xi=0$ אז ξ לא אפס של f

אם $\xi = 33\frac{1}{3}$ אז ξ לא נמצא בעיגול $|z|<1$.

לכן לא ייתכן ש-$f(\xi)=0$ וגם $f'(\xi)=0$ ולכן כל האפסים של f פשוטים.

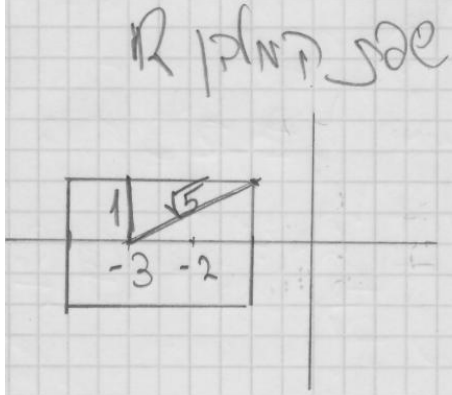
(3)

דוגמא: כמה אפסים יש לפולינום
$p(z)=z^5+z^3+5z^2+2$ בטבעת $1<|z|<2$?

פתרון: אם z נמצא על מעגל היחידה אז
$$|5z^2| = 5 > 4 \ge |z^5+z^3+2|$$
ולכן לפי משפט רושה ל-$p(z)$ יש שני אפסים
בעיגול $|z|<1$. אם $|z|=2$ אז
$$|z^5| = 32 > 30 \ge |z^3+5z^2+2|$$
לכן ל-$p(z)$ יש 5 אפסים בעיגול $|z|<2$
לכן ל-$p(z)$ יש 3 אפסים בטבעת $1<|z|<2$.

דוגמא: קבע כמה אפסים כולל ריבוי יש
לפונקציה $f(z)=(z+3)^2e^{3z}+(z+2)^4$ במלבן
$$R=\{(x,y): -4\le x\le -1,\ -1\le y\le 1\}$$

פתרון: תחילה נעריך את הביטויים $|(z+2)^4|$ ו-
$|(z+3)^2|$ כאשר z נמצא על שפת המלבן R
ממשפט פיתגורס נקבל



$$1\le|z+2|,\ |z+3|\le\sqrt5$$

(4) וכן $1 \le |z+3|^2 \le 5$ ו- $1 \le |z+2|^4 \le 25$

כמו כן, לכל z הנמצא על שפת הריבוע R מתקיים $|e^{3z}| \le e^{-3}$ ולכן לכל z על שפת הריבוע R מתקיים

$$|(z+3)^2 e^{3z}| \le 5e^{-3}$$
$$< 1 \le |z+2|^4$$

ולכן ל- f ולפונ׳ $(z+2)^4$ יש אותו מספר אפסים בתוך המלבן R ולכן ל- f יש 4 אפסים במלבן R.