פתרון תרגיל 4 – מופשטת

שאלה 1

א. תהי D_5 החבורה הדיהדרלית מסדר 10. תארו את כל תת־החבורות הלא טריוויאליות של D_5. הוכיחו כי כולן חבורות אבליות.
ב. מצאו תת־חבורה נורמלית לא טריוויאלית של D_5. האם יש יותר מאחת?

פתרון

א. נציג את החבורה בצורה הרגילה, כחבורה הנוצרת על ידי האיברים $\langle \sigma, \tau \rangle$ כאשר מתקיימים היחסים $\sigma^5 = \tau^2 = e, \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$. לפי משפט לגראנז' עבור $H \le D_5$ מתקיים כי $|H| \,\big|\, |D_5| = 10$, כלומר $|H| \in \{1,2,5,10\}$. תת־החבורות הטריוויאליות מתקבלות במקרים ש- $|H| \in \{1,10\}$. אחרת, הסדר של H הוא ראשוני, ולכן H ציקלית, ולכן היא חבורה אבלית.
כעת אפשר לבנות תת־חבורות מחזקות של איבר אחד של D_5. בדיקה "ידנית" תראה שהרשימה היא $\{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4\}$, $\{e, \tau\}$, $\{e, \tau\sigma\}$, $\{e, \tau\sigma^2\}$, $\{e, \tau\sigma^3\}$, $\{e, \tau\sigma^4\}$.
ב. תת־החבורה הנוצרת על ידי σ היא תת־החבורה הנורמלית הלא טריוויאלית היחידה של D_5. אפשר לראות שאם H היא תת־חבורה לא טריוויאלית אחרת, אז $\sigma H \neq H\sigma$.

מש"ל

שאלה 2

יהיו $H, K \le G$ תת־חבורות. הגדרנו מכפלת תת־חבורות $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$.

א. הוכיחו כי HK תת־חבורה אם ורק אם $HK = KH$.
ב. הסיקו מהסעיף הקודם כי אם $N \lhd G$ תת־חבורה נורמלית, אז $HN \le G$ תת־חבורה.
ג. הוכיחו כי אם $N_1, N_2 \lhd G$ תת־חבורות נורמליות, אז $N_1 \cap N_2 \lhd G$ וגם $N_1 N_2 \lhd G$ תת־חבורות נורמליות.

פתרון

א. $(\Rightarrow)$ נניח כי $HK = KH$. שימו לב כי הנתון $HK = KH$ **לא אומר** שלכל $h \in H, k \in K$ מתקיים $hk = kh$. מן הנתון נדע שאם $hk \in HK$, אז קיימים $h' \in H, k' \in K$ כך שמתקיים $hk = k'h'$.
נראה כי HK היא תת־חבורה בעזרת הקריטריון המקוצר. יש להראות כי

$HK \subseteq G$. $\varnothing \neq HK$. ההכלה מתקיימת מסגירות הפעולה של G. כמו כן HK לא ריקה כי היא מכילה את איבר היחידה, שכן $e \in H$ וגם $e \in K$, ולכן $e \cdot e = e \in HK$. כעת נשאר להראות שלכל $a,b \in HK$ מתקיים $ab^{-1} \in HK$. נרצה להראות שאם $h_1k_1, h_2k_2 \in HK$ אז $h_1k_1(h_2k_2)^{-1} \in HK$. מתקיים כי $h_1k_1(h_2k_2)^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1}$, ונסמן $k_3 = k_1k_2^{-1} \in K, h_3 = h_2^{-1}$. כעת לפי הנתון עבור k_3h_3 קיימים $h_3' \in H, k_3' \in K$ כך שמתקיים $h_3'k_3' = k_3h_3$. לכן $h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1} = h_1k_3h_3 = h_1h_3'k_3'$. מפני ש- $h_1h_3' \in H, k_3' \in K$ קיבלנו כי $h_1k_1(h_2k_2)^{-1} \in HK$, ולכן $HK \leq G$.

$(\Leftarrow)$ נשים לב שעבור חבורה X מתקיים $X = X^{-1} = \left\{a^{-1} : a \in X\right\}$. לכן אם $HK \leq G$, אז $HK = (HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = KH$ שכן גם $H^{-1} \leq G, K^{-1} \leq G$ הן תת־חבורות.

ב. אם $N \lhd G$ תת־חבורה נורמלית, אזי מתקיים $HN = NH$. זהו בדיוק התנאי מהסעיף הקודם שדרוש כדי להוכיח כי HN תת־חבורה.

ג. נתון כי $N_1, N_2 \lhd G$, ולכן $N_1 \cap N_2 \leq G$ כי חיתוך תת־חבורות הוא תת־חבורה. נשאר להראות כי $N_1 \cap N_2 \lhd G$. יהיו $h \in N_1 \cap N_2$, $g \in G$. צריך להראות כי $ghg^{-1} \in N_1 \cap N_2$. מפני ש- $h \in N_1 \lhd G$, אז $ghg^{-1} \in N_1$ כי N_1 תת־חבורה נורמלית. באופן דומה $ghg^{-1} \in N_2$, ולכן $ghg^{-1} \in N_1 \cap N_2$.

נראה כי $N_1N_2 \lhd G$. לפי הסעיף הקודם ידוע לנו כי N_1N_2 תת־חבורה, ונשאר להראות שהיא נורמלית. יהיו $h \in N_1N_2$, $g \in G$. צריך להראות כי $ghg^{-1} \in N_1N_2$. כיוון ש- $h \in N_1N_2$ קיימים $h_1 \in N_1, h_2 \in N_2$ כך ש- $h = h_1h_2$. כיוון ש- N_1 נורמלית נקבל $gh_1g^{-1} \in N_1$ וכיוון ש- N_2 נורמלית נקבל $gh_2g^{-1} \in N_2$. לכן $(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) = gh_1h_2g^{-1} = h \in N_1N_2$ כפי שרצינו להראות.

מש"ל

<u>שאלה 3</u>

א. הוכיחו שנורמליות היא תורשתית, כלומר: אם $N \leq K \leq G$ ו- N נורמלית ב- G, אזי N נורמלית ב- K.

ב. הוכיחו שנורמליות אינה טרנזיטיבית, כלומר: מצאו חבורות $N \lhd K \lhd G$ כך ש- N אינה נורמלית ב- G.

<u>הדרכה</u>: בתפקיד G קחו את A_4. A_4 היא תת חבורה של S_4 המכילה את תמורת הזהות ואת כל התמורות מהצורה $(---), (--)(--)$ (זו חבורה מסדר 12). עבור K היזכרו בחבורה שהכרתם בתרגיל הקודם, ואז חשבו מה אפשר לקחת בתור N.

<u>פתרון</u>

א. יש להראות שלכל $k\in K$ מתקיים $kN=Nk$. אך $K\le G$ ולכן $k\in G$ ומתקיים $kN=Nk$ שכן $N\lhd G$.

ב. נבחר

$$G=A_4=\begin{Bmatrix} id,(123),(132),(134),(143),(124),(142),(234),(243), \\ (12)(34),(13)(24),(14)(23) \end{Bmatrix}$$

חבורת התמורות הזוגיות. ונבחר:
$K=K_4=V=\{id,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$. V מכילה את כל התמורות מהצורה $(--)(--)$ ולכן מתקיים $V\lhd S_4$ וכן $V\lhd A_4$ (כמו כן מתקיים (אגב) $V\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$). כעת נתבונן בתת חבורה נוספת: $N=\langle(12)(34)\rangle$. מתקיים $|N|=2$ וכן $[V:N]=2$ ולכן $N\lhd V$. כלומר: $N\lhd V\lhd A_4$. עם זאת: N אינה נורמלית ב-A_4, שכן היא לא מכילה את כל התמורות עם מבנה מחזורים $(--)(--)$.
(מה הקשר בין נורמליות לבין מבנה מחזורים?)

מש"ל

שאלה 4

עבור כל אחת מן הפונקציות הבאות הוכיחו כי היא הומומורפיזם. בדקו עבור כל פונקציה האם היא מונומורפיזם, האם היא אפימורפיזם והאם היא איזומורפיזם.

א. $f:(\mathbb{C}^*,\cdot)\to(\mathbb{C}^*,\cdot)$ המוגדרת על ידי $f(x)=x^5$.

ב. $f:(\mathbb{Q}^*,\cdot)\to(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ המוגדרת על ידי $f(x)=x^5$.

ג. $f:G_1\times G_2\to G_2\times G_1$ כאשר $g_1\in G_1,g_2\in G_2$ איברי חבורות אבליות G_1,G_2 בהתאמה והפונקציה מוגדרת על ידי $f(g_1,g_2)=(g_2^{-1},g_1)$.

ד. $f:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R}^+,\cdot)$ המוגדרת על ידי $f(x)=e^x$.

פתרון

א. הפונקציה היא אפימורפיזם, אבל לא מונומורפיזם. למשל $f(1)=f(e^{\frac{2\pi i}{5}})=1$.

ב. הפונקציה היא מונומורפיזם, אבל לא אפימורפיזם. למשל $1/3$ לא בתמונה.

ג. הפונקציה היא איזומורפיזם. אפשר לראות כי $f^4=id$. שימו לב כי התנאי שהחבורה G_2 היא אבלית הוא הכרחי. אחרת לא בטוח כי f מוגדרת היטב.

ד. הפונקציה היא איזומורפיזם. האיזומורפיזם ההופכי הוא $\log$.

מש"ל

שאלה 5

א. מצאו אפימורפיזם $\varphi:(M_5(\mathbb{Q}),+)\to(\mathbb{Q}^5,+)$ כאשר $\mathbb{Q}^5$ היא מכפלה קרטזית של חמישה עותקים של $\mathbb{Q}$.

ב. מצאו איזומורפיזם $\varphi:G\to\mathbb{C}^*$ כאשר $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}: a,b\in\mathbb{R}, a^2+b^2>0\right\}$ שהוכחתם בתרגיל 1 שהיא חבורה.

פתרון

א. נשים לב כי $(M_5(\mathbb{Q}),+)\cong(\mathbb{Q}^{25},+)$ לפי איזומורפיזם שמסדר כל אחד מאיברי מטריצה ששייכת ל- $M_5(\mathbb{Q})$ בשורה מאורך 25, כלומר וקטור ב-$\mathbb{Q}^{25}$. הוכיחו כי העתקה של מכפלה קרטזית $G_1\times\ldots\times G_n$ למכפלה קרטזית $G_1\times\ldots\times G_k$ עבור $k\le n$ כשברכיב i היא העתקת הזהות של G_i היא הומומורפיזם על. כלומר יש להגדיר את ההעתקה $f(a_1,a_2,\ldots,a_{25})=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$ ולבדוק שהיא אכן אפימורפיזם.

ב. נגדיר את האיזומורפיזם $\varphi:G\to\mathbb{C}^*$ לפי $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}\mapsto a+bi$. ברור כי זו פונקציה חח"ע ועל. נשאר להראות כי זהו הומומורפיזם: יהיו $M_1,M_2\in G$ ונרצה להראות כי $\varphi(M_1M_2)=\varphi(M_1)\varphi(M_2)$. נניח כי $M_1=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}, M_2=\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c\end{pmatrix}$, אז נקבל כי

$$\varphi(M_1M_2)=\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c\end{pmatrix}\right)=\varphi\left(\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd\end{pmatrix}\right)=$$
$$ac-bd+(ad+bc)i=\left(a+bi\right)\left(c+di\right)=\varphi(M_1)\varphi(M_2)$$

מש"ל

שאלה 6

א. הראו שהומומורפיזם $\varphi:G\to H$ הוא חח"ע אם ורק אם $\ker\varphi=\{1_G\}$.

ב. הראו שאם $\varphi:G\to H$ איזומורפיזם, אזי $o\left(\varphi(a)\right)=o(a)$ לכל $a\in G$.

ג. הראו שהומומורפיזם מעביר קבוצת יוצרים לקבוצת יוצרים.

פתרון

א. $\Leftarrow$: $\varphi:G\to H$ הומומרפיזם ולכן מתקיים בהכרח $\varphi(1_G)=1_H$ ומהעובדה שהוא חח"ע נובע ש $\varphi(g)\neq 1_H \quad \forall g\neq 1_G$. מכאן $\ker\varphi=\{1_G\}$.

$\Rightarrow$: כדי להוכיח ש φ חח"ע נניח ש $\varphi(g_1)=\varphi(g_2)$ ונראה ש $g_1=g_2$. $\varphi(g_1)=\varphi(g_2)$ ולכן $\varphi(g_1)\varphi(g_2)^{-1}=1_H$. מכיון ש φ הומומורפיזם מתקיים $\varphi(g_1g_2^{-1})=\varphi(g_1)\varphi(g_2)^{-1}$

ולכן $\varphi(g_1g_2^{-1})=1_H$. כלומר $g_1g_2^{-1}\in\ker\varphi$. אך מהנתון $\ker\varphi=\{1_G\}$ ומכאן $g_1g_2^{-1}=1_G$ ולבסוף נקבל ש $g_1=g_2$.

ב. למעשה מספיק היה לדרוש בשאלה מונומורפיזם. יהי $a\in G$.
מקרה ראשון: $o(a)=\infty$. נראה שאז $o(\varphi(a))=\infty$. נניח בשלילה שקיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $(\varphi(a))^n=1_H$ אזי $\varphi(a^n)=(\varphi(a))^n=1_H$ ולכן $a^n\in\ker\varphi$ ומכיון ש φ חח"ע אז בהכרח $a^n=1_G$. נקבל ש $o(a)<\infty$ בסתירה להנחה.
מקרה שני: $o(a)<\infty$.
עפ"י מה שהוכחנו בתרגול מכיון שזהו הומורפיזם וכן $o(a)<\infty$ אז מתקיים $o(\varphi(a))|o(a)$ ובפרט $m:=o(\varphi(a))<\infty$. מצד שני $\varphi(a^m)=\varphi(a)^m=1_H$ ולכן $a^m\in\ker\varphi$ ובשל החח"ע נקבל ש $a^m=1_H$. מכאן, $o(a)|m$. כלומר $o(a)|o(\varphi(a))$.
מכיון שיחס החילוק מעל קבוצת הטבעיים הוא אנטיסימטרי נקבל ש $o(\varphi(a))=o(a)$.

ג. שימו לב שהיה אי-דיוק בשאלה. הכוונה היא שההעתקה מעבירה קבוצת יוצרים לקבוצת יוצרים *של התמונה*. לחלופין, אפשר לעשות את ההוכחה עבור העתקה שהיא אפימורפיזם.
יהי $\varphi:G\to H$ אפימורפיזם ונניח ש $\langle a_i:i\in I\rangle=G$. נראה ש- $\langle\varphi(a_i):i\in I\rangle=H$. יהי $h\in H$ אזי מכיון ש $\varphi:G\to H$ אפימורפיזם קיים $g\in G$ כך ש- $\varphi(g)=h$. מכיון ש $\langle a_i:i\in I\rangle=G$ נקבל שקיימים : $k\in\mathbb{N}$, $i_1,i_2,i_3,\dots i_k\in I$ (לא בהכרח שונים) וכן $r_1,r_2,\dots r_k\in\mathbb{Z}$ כך ש $g=a_{i_1}^{r_1}a_{i_2}^{r_2}\cdots a_{i_k}^{r_k}$. מתקיים $h=\varphi(g)=\varphi(a_{i_1}^{r_1}a_{i_2}^{r_2}\cdots a_{i_k}^{r_k})=\varphi(a_{i_1}^{r_1})\varphi(a_{i_2}^{r_2})\cdots\varphi(a_{i_k}^{r_k})$. זה כמובן מוכיח ש $\langle\varphi(a_i):i\in I\rangle=H$.

מש"ל

<u>שאלה 7</u>

תהי G חבורה ויהיו $H_1,H_2\le G$ תתי חבורות המקיימות $H_1\cong H_2$. הוכיחו או הפריכו: $[G:H_1]=[G:H_2]$.

<u>פתרון</u>

נבחר $G=\mathbb{Z}$ ו- $H_1=3\mathbb{Z},\ H_2=5\mathbb{Z}$. ברור ש- $H_1\cong H_2$ (מדוע? כמה חבורות ציקליות אינסופיות אתם מכירים?). עם זאת, $[G:H_1]=3,\ [G:H_2]=5$.

מש"ל