תרגול 12

אינטגרציה וגזירה איבר-איבר.

משפט: תהי $f_n(x)$ סדרת פונקציות רציפות המתכנסת במ"ש לפונקציה f בקטע $[a,b]$ אזי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ומתקיים:

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x) \underset{\text{הגדרה}}{=} \int_a^b f(x)dx \overset{\downarrow}{=} \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

למה, אם f_n סדרת פונקציות גזירות ברציפות ב- $[a,b]$, ומתקיים כי f_n' (סדרת הנגזרות) מתכנסת במ"ש בקטע $[a,b]$ לפונקציה f.

אזי f גזירה ומתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$$

אינטגרציה של טורי פונקציות:

משפט: יהי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ טור פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ המתכנס במ"ש ב $[a,b]$ ל $S(x)$. אזי:

1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$ מתכנס.

2. משפט:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x) = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,dt = \int_a^b S(x)\,dx$$

תרגיל: חשבו את סכום הטור

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n} = \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{3\cdot 27}+\dots+\dots$$

נתבונן בטור הפונקציות:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

ונשים לב כי $S=S(\frac{1}{3})$.

את איבר הכללי של הטור $S(x)$ נוכל לכתוב כאינטגרל:

$$\frac{x^n}{n} = \int_0^x t^{n-1}\,dt$$

מכאן ש:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}\,dt \overset{(*)}{=} \int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}\right)dt$$

✓

וניתן לעשות זאת רק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}$

מתכנס במ"ש. הוא אכן מתכנס במידה שווה

לכל $c<1$ בקטע $t\in[-c,c]$

לפי מבחן ה-M של ויירשטראס

כי $t<c$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} c^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c^n$ הוא טור

מתכנס. (טור הנדסי כנ"ל)

ולכן אפשר לכתוב: $\displaystyle\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

בנוסף אנו גם יודעים מה ה סכום הטור ההנדסי

$$= \int_0^x \left(\frac{1}{1-t}\right) dt = -\ln|1-x|$$

כאשר נציב $x=\frac{1}{3}$ ונקבל $S = -\ln\left|1-\frac{1}{3}\right|$

$$= -\ln(2/3) = \ln(1.5)$$

<u>משפט:</u> (גזירה איבר איבר)

תהי $f_n(x)$ סדרת פונקציות גזירה ברציפות בקטע $[a,b]$. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ מתכנס נקודתית.

והטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ מתכנס במ"ש ב $[a,b]$ אז

$S(x)$ גזירה ומתקיים

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

<u>דוגמה:</u> חשבו את סכום הטור $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$

נגדיר את הפונקציה: $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k x^k$

ונשים לב כי $S = S(1/3)$.

אם ה איבר הכללי של הטור ניתן לכתוב

$$(x^k)' = k x^{k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = x\sum_{k=1}^{\infty} (x^k)'$$

וכיוון הטור $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$ מתכנס במ"ש נוכל לגזור

$$= x\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)'$$

למה הטור מתכנס במ"ש בקטע $[-c,c]$ כאשר $c<1$?

נבדוק עם מבחן ה M של ויירשטראס. את הטור

$\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot c^{k-1}$ וזה טור מתכנס לפי מבחן השורש

של קושי: $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{kc^{k-1}} = c < 1$.

ולכן בסה"כ הטור הנגזרות אכן מתכנס במ"ש ונוכל להמשיך את החישוב

$$= x\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)' = x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = x\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2}$$

ולכן $S = s(1/3) = \frac{1/3}{(1-1/3)^2} = \frac{1/3}{4/9} = \boxed{\frac{3}{4}}$

<u>תרגיל</u>: הוכיחו כי לכל $t\in(0,1)$ מתקיים ש

$$\underline{\ln(1+t)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n}$$

ידוע ש: $\ln(1+t) = \int_0^t \frac{1}{1+x}\,dx$ עוד ידוע כי

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

כדי להמשיך נצטרך להוכיח שהטור $\sum(-x)^n$ מתכנס במ"ש בקטע $[0,a]$ לכל $a<1$.
$(|-x|^n \le a^n)$

נשתמש במבחן ה-M של ויירשטראס עם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ וטור זה מתכנס כטור הנדסי.

כעת ניתן להשתמש באינטגרציה איבר איבר ולקבל:

$$\ln(1+t) = \int_0^t \frac{1}{1+x}\,dx = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t (-x)^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t (-1)^n x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_0^t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{t^k}{k}$$

$$(k=n+1)$$

הערה: הוכחנו שניתן לעשות את כל המעברים הללו עבור $a<1$ בקטע $[0,a]$.

כיוון שזה נכון לכל $a<1$ עבור $t\in(0,1)$ תמיד ניתן למצוא a כזה (כך ש $t\in[0,a]$) ולכן המעברים יהיו נכונים.

תחום לטור טילור

תהי: $f(x)$ פונקציה גזירה $(n+1)$ פעמים.

היינו רוצים לחשב את ערך הפונקציה בנק' x

קירוב אם אנחנו יודעים את ערך הפונקציה בנק' קרובה יחסית a

$f(a)$ ✓ , $f(x)=?$

פיתוח הפונקציה $f(x)$ סביב הנק' a מסדר n:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

משפט (שארית לגרנז'): קיימת נק' c בין a ל-x כך ש

$$r_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$\boxed{r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$