1. תרגיל: $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ (שיקוף ביחס לציר x). נתון כי

$$[T]_B^B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מצאו בסיס B מתאים. האם B יחיד?

פתרון: נסמן $B=\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right\}$.

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix},T\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ -d \end{pmatrix}$$

מהגדרת ההעתקה.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\left[T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right]_B,\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\left[T\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right]_B$$

מבניית מטריצה מייצגת.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}\right]_B,\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix} c \\ -d \end{pmatrix}\right]_B$$

נציב את הקורדינטות:

$$\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+0\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c \\ -d \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+1\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

מקבלים מערכת משוואות של 4 משוואות עם 4 נעלמים:

$$a=-a$$

$$-b=-b$$

$$c=2a+c$$

$$-d=2b+d$$

מסיקים ש$a=0$ ו$d=-b$. אלה ההגבלות היחידות שנוביות מהמטריצה המייצגת. לכן אפשר לבחור c וb כרצוננו. אבל בנוסף, צריך לדאוג ששני הוקטורים יהיו בסיס, ולכן יש בחירות שאינן מותרות. למשל, אי אפשר לקח $b=c=0$. נבחר למשל: $b=2,c=15$.

$$B=\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 15 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$$

תרגיל: $V=\mathbb{R}_2[x]$ ות"מ

$$W_1=\{p(x)\mid p(1)=0\}$$
$$W_2=span\left\{1+x,1+2x-x^2\right\}$$

מצאו חיתוך וסכום

פתרון: נעביר את ה"בעיה" ל$\mathbb{R}^3$ ע"י מעבר לוקטורי קורדינטות. נבחר בסיס לV: $\{1,x,x^2\}$.

$$W_1=\{p=a+bx+cx^2|a+b+c=0\}$$

נחשב את הסכום והחיתוך של תתי המרחבים

$$U_1,U_2$$

של $\mathbb{R}^3$ הבאים:

$$U_1=\left\{\left(\begin{array}{c}a\\b\\c\end{array}\right)|a+b+c=0\right\}$$

$$U_2=span\left\{\left(\begin{array}{c}1\\1\\0\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}1\\2\\-1\end{array}\right)\right\}$$

פתרנו תרגילים דומים ב$\mathbb{R}^n$. (בשביל חיתוך- מעבירים למשוואות ואז פותרים את המשוואות. בשביל סכום- מוצאים בסיסים לשני תתי המרחבים, מאחדים את הבסיסים וזורקים את הוקטורים המיותרים. את התשובות שיוצאות בסוף- צריך להחזיר להיות פולינומים.

2. תרגיל: $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ ות"מ

$$W_1=\left\{A\mid(trA=0)\wedge\left(A^t=A\right)\right\}$$
$$W_2=span\left\{\left(\begin{array}{cc}-3&3\\5&5\end{array}\right),\left(\begin{array}{cc}2&-3\\-6&-5\end{array}\right)\right\}$$

מצאו סכום.

$$W_1=\left(\begin{array}{cc}a&b\\b&-a\end{array}\right)=span\{\left(\begin{array}{cc}1&0\\0&-1\end{array}\right),\left(\begin{array}{cc}0&1\\1&0\end{array}\right)\}$$

נבחר את הבסיס הסטנדרטי $S=\left\{\left(\begin{array}{cc}1&0\\0&0\end{array}\right),\left(\begin{array}{cc}0&1\\0&0\end{array}\right),\left(\begin{array}{cc}0&0\\1&0\end{array}\right),\left(\begin{array}{cc}0&0\\0&1\end{array}\right)\right\}$
ונמצא את הסכום של מרחבי הקורדינטות של W_1,W_2.

$$U_1=span\left\{\left(\begin{array}{c}1\\0\\0\\-1\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}0\\1\\1\\0\end{array}\right)\right\}$$

$$U_2 = span\left\{\begin{pmatrix}-3\\3\\5\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\\-6\\-5\end{pmatrix}\right\}$$

לא לשכוח להחזיר את התשובה הסופית למטריצות.

3. תהא $T : V_1 \to V_2$ ו $S : V_2 \to V_3$ ה״ל. הוכיחו כי

(א) $\ker(T) \subseteq \ker(S \circ T)$

פתרון: יהי $v \in V_1$כך ש$v \in \ker T$. מהגדרת הגרעין נובע ש$T(v) = 0$. נפעיל את S על שני האגפים. נקבל:

$$S(T(v)) = S(0)$$

S העתקה לינארית ולכן שולחת את 0 ל0. אז נקבל ש

$$(S \circ T)(v) = 0$$

ולכן $v \in \ker(S \circ T)$.

(ב) $Im(S \circ T) \subseteq Im(S)$

יהי $v \in Im(S \circ T)$. כלומר, קיים $w \in V_1$ כך $(S \circ T)(w) = v$. כלומר, $S(T(w)) = v$. לכן $v \in ImS$. כי מצאנו וקטור, $T(w)$ שS שולחת לv.

4. יהא $V = \mathbb{R}_2[x]$ ושני בסיסים

$$B = \left\{2 + x, 3 - x + x^2, -2 + 4x - x^2\right\}, C = \left\{1 + x + x^2, 2 + 2x, x + 2x^2\right\}$$

שני בסיסים של V. בנוסף, נסמן $S = \left\{1, x, x^2\right\}$ את הבסיס הסטנדרטי של V.

(א) מצאו את מטריצות המעבר $[I]_C^B, [I]_S^B, [I]_C^S$ ומצאו את $[I]_B^C$

פתרון: ראשית, נחשב

$$[I]_S^B = \begin{pmatrix} [b_1]_S & [b_2]_S & [b_3]_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[I]_C^S = \left([I]_S^C\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[I]_C^B = [I]_C^S [I]_S^B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -13 \\ 0 & -3 & 5.5 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

אלגוריתם:

$$[I]_S^C | [I]_S^B$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

מדרגים את המטריצה השמאלית. עד שנגיע למטריצת היחידה. כל פעולה שעושים על המטריצה השמאלית, עושים גם על המטריצה הימנית. ברגע שנגיע למטריצת היחידה משמאל, המטריצה שמופיעה בצד ימין, היא מטריצת המעבר שחיפשנו.

$$[I]_B^C = \left([I]_C^B\right)^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 4 & -21 \\ 11 & 2 & 22 \\ 6 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

(ב) נגדיר $T : V \to V$ ע"י הכלל $T(p(x)) = p(x+1)$. מצאו את המטריצה $[T]_C^B, [T]_C^C$.

פתרון : נחשב

$$[T]_S^B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{2 + x, 3 - x + x^2, -2 + 4x - x^2\right\}$$

$$T(2 + x) = 3 + x, T(3 - x + x^2) = 3 + x + x^2,$$

$$T(-2 + 4x - x^2) = 1 + 2x - x^2$$

$$[T]_C^B = [I]_C^S [T]_S^B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ -0.5 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_C^C = [T]_C^B [I]_B^C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ -0.5 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 4 & -21 \\ 11 & 2 & 22 \\ 6 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

5. תהא $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ מטריצה הפיכה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ויהא $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס ל $\mathbb{R}^3$.

(א) מצאו בסיס B כך ש $A = [I]_C^B$
פתרון: $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. ידוע מבניית מטריצת מעבר, ש

$$[b_1]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, [b_2]_C = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, [b_3]_C = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$b_3 = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(ב) מצאו בסיס D כך ש $A = [I]_D^C$
פתרון:

$$[I]_C^D = A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

ונפתור בדיוק כמו בסעיף הקודם. כלומר, נציב $D = \{d_1, d_2, d_3\}$ ואז ידוע שהעמודה הראשונה של A^{-1} שווה ל$[d_1]_C$. זה אומר שd_1 שווה לצירוף לינארי של איברי C, כאשר מקדמי הצירוף הם האיברים בעמודה הראשונה של A^{-1}. כנ"ל לגבי d_2 וd_3.

(ג) נגדיר $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ ע"י $T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a + 2b + 3c) + (4a + 5b + 6c)\, x + (a + b)\, x^2$ הוכיחו כי T הפיכה ומצאו את ההופכית.
פתרון: בשביל להוכיח שהעתקה היא הפיכה אפשר למצוא לה מטריצה מייצגת, בין שני בסיסים כלשהם, ולהראות שהמטריצה המייצגת הפיכה.

$$[T]_S^S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

המטריצה הפיכה (ידוע מהסעיף הקודם. בעיקרון צריך לבדוק את זה).

$$[T^{-1}]_S^S = ([T]_S^S)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = [I]_C^D = A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} -2a+b-c \\ 2a-b+2c \\ -\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{3}b-c \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}(a+bx+cx^2) = [T^{-1}(a+bx+cx^2)]_S =$$

$$[T^{-1}]_S^S[a+bx+cx^2]_S = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

6. תהא $T : V \to V$ ויהיו B, C בסיסים של V הוכיחו כי $tr[T]_B^B = tr[T]_C^C$.
פתרון: נשים לב שאילו מטריצות דומות.

$$[T]_B^B = [I]_B^C[T]_C^C[I]_C^B = ([I]_C^B)^{-1}[T]_C^C[I]_C^B$$

נסמן $[I]_C^B = P$ קיבלנו ש

$$[T]_B^B = P^{-1}[T]_C^C P$$

נוכיח טענה כללית: אם M, N שתי מטריצות ריבועיות מאותו גודל, כך שקיימת P הפיכה שעבורה

$$M = P^{-1}NP$$

אז

$$tr(M) = tr(N)$$

$$tr(M) = tr(P^{-1}NP) = tr((P^{-1}N)P) = tr(P(P^{-1}N)) = tr(N)$$

תיזכורת: לכל שתי מטריצות A, B, $tr(AB) = tr(BA)$

7. תהא $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ המקיימת כי

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

ובנוסף נתונה מטריצה מייצגת שלה

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & x & 8 \\ 0 & 0 & x & 4 \end{pmatrix}$$

מצאו את x.
פתרון: נשים לב שT היא לא העתקה הפיכה. כי ידוע שהעתקה הפיכה מעבירה בת"ל

לבת"ל. אבל לא ייתכן ש $T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ בת"ל, כי היא מוכלת בתת מרחב ממימד 2.

ניזכר שאם T היא העתקה לא הפיכה, אז לכל שני בסיסים B, C המטריצה $[T]_C^B$ היא מטריצה לא הפיכה. על מנת שהמטריצה תהיה לא הפיכה, x חייב להיות שווה ל0 . (אפשר לראות את זה למשל ע"י זה שנדרג את המטריצה לצורה משולשית, ובשביל שהיא תהיה לא הפיכה צריכה להיות עמודה בלי איבר מוביל).