תרגול 5 – 88-112 אלגברה לינארית 1
סמסטר א' תשע"ו

נובמבר 2015

1 מטריצות – המשך

מטריצות הפיכות – המשך

תרגיל 1.1 (לחימום הקנה)**.** תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה הפיכה, ונניח ש-$C_i(A) = e_j$. הוכיחו: $C_j(A^{-1}) = e_i$.

הוכחה. נעזרים בכפל עמודה-עמודה ובעובדה ש-$Ae_k = C_k(A)$. מקבלים

$$C_j\left(A^{-1}\right) = A^{-1}e_j = A^{-1}C_i(A) = C_i\left(A^{-1}A\right) = C_i(I) = e_i$$

□

תזכורת. הגדרנו שלושה סוגים של פעולות שורה אלמנטריות על מטריצה כלשהי:

1. החלפת שורות – $R_i \leftrightarrow R_j$.
2. כפל שורה בסקלר $\alpha \neq 0$ – $\alpha R_i \to R_i$.
3. הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת – $R_i + \alpha R_j \to R_i$.

כעת נראה את הקשר בין הפעולות האלו לבין כפל מטריצות.

משפט 1.2. תהי A מטריצה מגודל $n \times n$, ותהי B מטריצה המתקבלת מ-A על ידי פעולת שורה מסוימת. תהי E המטריצה המתקבלת מ-I על ידי ביצוע אותה פעולת שורה (E נקראת **מטריצה אלמנטרית**). אזי $B = E \cdot A$. במילים, ביצוע פעולות שורה אלמנטריות שקול לכפל במטריצה אלמנטרית משמאל.

דוגמה 1.3. המטריצה המתאימה ל-$\alpha R_1 \to R_1$ היא $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

הערה 1.4. אם E מטריצה אלמנטרית, אזי E הפיכה, וההופכית E^{-1} היא ביצוע הפעולה ההפוכה על I. במפורש:

1. אם E התקבלה מ-I על ידי החלפת שורות, $R_i \leftrightarrow R_j$, אזי $E^{-1} = E$ (כי הפעולה ההפוכה להחלפת שורות היא להחליף בחזרה).

2. אם E התקבלה מ-I על ידי $\alpha R_i \to R_i$, כדי לקבל את E^{-1} נפעיל על I את הפעולה $\frac{1}{\alpha} R_i \to R_i$.

3. אם E התקבלה מ-I על ידי $R_i + \alpha R_j \to R_i$, כדי לקבל את E^{-1} נפעיל על I את הפעולה $R_i - \alpha R_j \to R_i$.

תרגיל 1.5. חשבו את המטריצה ההופכית של $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

פתרון. המטריצה A התקבלה מ-I על ידי הפעלת הפעולה $R_2 + 3R_1 \to R_2$. לכן, A^{-1} היא המטריצה שתתקבל על ידי הפעלת הפעולה $R_2 - 3R_1 \to R_2$ על I. כלומר,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 3R_1 \to R_2} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מטריצות הפיכות ומערכות משוואות

משפט 1.6. תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. A הפיכה.

2. לכל $b \in \mathbb{F}^n$ קיים פתרון יחיד למערכת $Ax = b$.

3. למערכת $Ax = 0$ קיים פתרון יחיד, שהוא הפתרון הטריוויאלי (כלומר, $x = 0$).

תרגיל 1.7. תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה, ונניח שקיים $b \in \mathbb{F}^n$ שעבורו למערכת $Ax = b$ אין פתרון. הוכיחו: למערכת $(A^3 + A)x = 0$ קיים פתרון לא טריוויאלי.

הוכחה. לפי המשפט, המטריצה A אינה הפיכה. נשים לב כי $A^3 + A = A\left(A^2 + I\right)$, ולכן גם $A^3 + A$ אינה הפיכה. לפי המשפט, למערכת $Ax = 0$ קיים פתרון לא טריוויאלי. $\square$

תרגיל 1.8. תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצות, ונניח ש-A הפיכה.

1. האם למערכות $Bx = 0$ ו-$ABx = 0$ יש אותם פתרונות?

2. האם למערכות $Bx = 0$ ו-$BAx = 0$ יש אותם פתרונות?

פתרון.

1. כן. ברור שכל פתרון של $Bx = 0$ הוא פתרון של $ABx = 0$, ולכן מספיק להוכיח שכל פתרון של $ABx = 0$ הוא פתרון של $Bx = 0$.
אם x הוא פתרון של $ABx = 0$, נכפול ב-A^{-1} משני הצדדים, ונקבל $Bx = 0$. לכן, x הוא פתרון של $Bx = 0$, כדרוש.

2. לא. ניקח $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (הפיכה, כי $A^2 = I$), $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. הפתרונות של המערכת $Bx = 0$ הם מהצורה $\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$, ואילו הפתרונות של המערכת $BAx = 0$ הם מהצורה $\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$.

המטריצה המשוחלפת

הגדרה 1.9. תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה. **המטריצה המשוחלפת** (transpose) של A, A^t, היא המטריצה מסדר $n \times m$, שהאיבר ה-(i,j) שלה הוא האיבר ה-(j,i) של A.

דוגמה 1.10. אם $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, אזי $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

טענה 1.11 (תכונות השחלוף). לכל $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים:

1. $(A+B)^t = A^t + B^t$.
2. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.
3. $(A^t)^t = A$.

טענה 1.12. לכל $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ולכל $B \in \mathbb{F}^{n\times k}$, $(AB)^t = B^t A^t$.

הגדרה 1.13. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ (ריבועית!). אומרים ש-A **סימטרית** אם $A^t = A$; אומרים ש-A **אנטי-סימטרית**, אם $A^t = -A$.

דוגמה 1.14. המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ היא סימטרית; המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ היא אנטי-סימטרית; המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ היא לא סימטרית ולא אנטי-סימטרית.

תרגיל 1.15. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה. הוכיחו שהמטריצה $A + A^t$ סימטרית, ואילו $A - A^t$ אנטי-סימטרית.

הוכחה. לפי התכונות של שחלוף,

$$\begin{aligned} \left(A + A^t\right)^t &= A^t + \left(A^t\right)^t = A^t + A = A + A^t \\ \left(A - A^t\right)^t &= A^t + \left(-A^t\right)^t = A^t - \left(A^t\right)^t = A^t - A = -\left(A - A^t\right) \end{aligned}$$

$\square$

תרגיל 1.16. תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה. הוכיחו שהמטריצה AA^t מוגדרת וסימטרית.

הוכחה. קודם כל, קל לוודא ש-AA^t היא מוגדרת, והיא ריבועית. בנוסף, לפי טענה שהוכחנו,

$$\left(AA^t\right)^t = \left(A^t\right)^t A^t = AA^t$$

ולכן היא סימטרית. $\square$

תרגיל 1.17. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה אנטי-סימטרית.

1. הוכיחו שאם $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ (כלומר, $1 + 1 \neq 0$), אזי האיברים שעל האלכסון של A הם אפסים.
2. מה קורה מעל $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$?

הוכחה.

1. נשים לב כי בתהליך השחלוף אנחנו לא משנים את האלכסון, כלומר האלכסון נשמר. לכן, כיוון ש-$A^t = -A$, לכל $i = 1, \ldots, n$ מתקיים $a_{ii} = -a_{ii}$, כלומר $2a_{ii} = 0$, ומכאן ש-$a_{ii} = 0$.

2. מעל $\mathbb{Z}_2$ אי-אפשר לחלק ב-2! אז ההוכחה של הסעיף הראשון לא עובדת. יש דוגמה נגדית:

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}$$

כי הנגדי של $\overline{1}$ הוא $\overline{1}$.

□

עקבה (trace)

הגדרה 1.18. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. נגדיר את **העקבה (trace)** שלה להיות

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

כלומר, זהו סכום איברי האלכסון.

דוגמה 1.19. עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\operatorname{tr}(A) = 1 + 5 + (-2) = 4$.

טענה 1.20 (תכונות העקבה). לכל $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$,

1. $\operatorname{tr}(A^t) = \operatorname{tr}(A)$.
2. $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.
3. לכל $\alpha \in \mathbb{F}$, $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr}(A)$.
4. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

הוכחת התכונה האחרונה. נסמן $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $AB = (c_{ij})$, $BA = (d_{ij})$. לכן,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} \\ \operatorname{tr}(BA) &= \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ik}a_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ik} \end{aligned}$$

כשהמעבר האחרון בשורה האחרונה מסתמך על החלפת סדר הסכימה, על חילופיות ועל פילוג.

□

תרגיל 1.21. יהי $\mathbb{F}$ שדה.

1. הוכיחו: אם $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$, אזי לא קיימות מטריצות $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ שעבורן $AB - BA = I$.
2. תנו דוגמה לשדה $\mathbb{F}$ עם $\text{char}(\mathbb{F}) > 0$, שעבורו קיימות מטריצות כאלו.

פתרון. ניעזר ב-trace!

1. נניח בשלילה שקיימות מטריצות כאלו. נסתכל על העקבה של שני הצדדים: מצד אחד,
$$\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0$$
ומצד שני,
$$\text{tr}(I) = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ times}}$$
אבל $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 0$, ולכן לא משנה כמה פעמים נחבר את 1 לעצמו, לא נקבל 0 – וקיבלנו סתירה. לכן אין מטריצות כאלו.
2. ניקח $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$, $A = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix}$. על ידי חישוב ישיר, $AB - BA = I$.