

שיעורי בית 5

1. יהי $\mathbb{R}^4 \supseteq S = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. מצאו בסיס ל $W = S^\perp$.
 (כאשר \mathbb{R}^4 עם המכפלה הסקלארית).
פתרון : מתקיים

$$\begin{aligned} W &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, v_1 \right\rangle = 0 \wedge \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, v_2 \right\rangle = 0 \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \wedge \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x + y + w = 0 \\ x + y + z + 2w = 0 \end{cases} \right\} \end{aligned}$$

כלומר W הוא אוסף הפתרונות של מערכת הומוגנית כבר ראינו זה תת מרחב.
 כדי למצוא בסיס נפתור את המערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} -t-s \\ s \\ -t \\ t \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2. סטודנט סקרן החליט לבדוק מה עומד מאחורי הצלחתו במבחני התואר. הוא החליט שהפרמטרים הקובעים הם: P_1 מספר השעות שהקדיש ללימוד למבחן, P_2 מספר שיעורי הבית שפתר ו P_3 מספר הספרים שהוא קרא בנושא. הוא אסף את הנתונים הבאים מ 4 קורסים שונים

	P_1	P_2	P_3	Final Grade
1	4	2	3	7
2	2	3	3	4
3	4	4	5	8
4	2	5	5	6

השאלה שעמדה בפני הסטודנט היא מה המשקל שתרם כל פרטמר לציון המבחן. הוא החליט לסמן ב x_i את המשקל שתורם פרמטר P_i לציון הסופי וניסה למצוא אותם ע"י פתירת המשוואות

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 6 \end{aligned}$$

אך לצערנו, לא נמצא פתרון... הסטודנט לא אמר נואש והחליט להשתמש בידע שרכש בקורס אלגברה לינארית... הוא החליט למצוא c_1, c_2, c_3 כך שוקטור התוצאה

$$b' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{pmatrix} \text{ שמחושב ע"י}$$

$$\begin{aligned} 4c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= b'_1 \\ 2c_1 + 3c_2 + 3c_3 &= b'_2 \\ 4c_1 + 4c_2 + 5c_3 &= b'_3 \\ 2c_1 + 5c_2 + 5c_3 &= b'_4 \end{aligned}$$

יהיה הכי קרוב לוקטור התוצאה האמיתי $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$. כוונתו ב"קרוב" הוא למזער

את $\|b - b'\|$ (כאשר $\|*\|$ היא הנורמה המשורית מהמכפלה הסקלארית המוגדרת על \mathbb{R}^4). מצאו גם אתם את c_1, c_2, c_3 .

[הדרכה: יצגו את הבעיה כמערכת משוואת $Ax = b$ וחשבו איך הבעיה של הסטודנט שקולה למיצאת הטלה של b על איזה תת מרחב (שהוא יהיה b')... לאחר מכן פתרו את המשוואה $Ax = b'$. אזהרה: תרגיל עם חישובים לפניך]

פתרון: נגדיר

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

ונרצה לפתור את המערכת $Ax = b$ עבור $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$. נדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 8 \\ 2 & 5 & 5 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3.5 & 2.5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1.5 \end{array} \right)$$

רואים כי אכן אין פתרון למערכת ועמודות A בת"ל. נשים לב כי $C(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^4\}$ והשאלה מבקשת למצוא $b' \in C(A)$ כך ש $\|b - b'\| = \min \{\|b - b''\| : b'' \in C(A)\}$ וזהו בדיוק התכונה של ההטלה $\pi_{C(A)}(b)$ ולכן לאחר שנמצא את b' נפתור את

$$\text{המערכת } Ax = b' \text{ והפתרון שלה יהיה } c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \text{ המבוקש.}$$

נמצא בסיס או"ג ל $C(A)$ ע"י גרם שמידט

$$\text{נסמן } v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{40}{40} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{48}{40} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{12}{14} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{6}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{6}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/35 \\ -9/35 \\ 1/5 \\ 1/35 \end{pmatrix}$$

$$\text{כלומר } \{w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} -3/35 \\ -9/35 \\ 1/5 \\ 1/35 \end{pmatrix}\} \text{ בסיס אורתוגנלי ל } C(A)$$

$$\text{כעת נטיל את } b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ על } C(A) \text{ באמצעות הבסיס הזה שהוא או"ג. לפי}$$

התיאוריה

$$b' = \pi_{C(A)}(b) = \sum_{i=1}^3 \pi_{w_i}(b) = \sum_{i=1}^3 \frac{\langle b, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i$$

נחשב

$$\frac{\langle b, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \frac{80}{40} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{\langle b, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = \frac{8}{14} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{\langle b, w_3 \rangle}{\|w_3\|^2} w_3 = \frac{1/7}{4/35} \begin{pmatrix} -3/35 \\ -9/35 \\ 1/5 \\ 1/35 \end{pmatrix}$$

ונקבל בסופו של דבר

$$b' = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{4}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{28} \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 7/5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 27 \\ 17 \\ 33 \\ 23 \end{pmatrix}$$

נפתור את המערכת $Ax = b'$ ונקבל שהפתרון הוא

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 5/4 \end{pmatrix}$$

3. יהא $V = \mathbb{R}^5$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. נגדיר

$$W = \text{span} \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ת"מ של V .

(א) מצאו בסיס אורתוגונאלי ל W ע"י שימוש בתהליך גרם שמידט על הבסיס

$$B = \{v_1, v_2, v_3\}$$

פתרון:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ב) מצאו את ההטלה (הניצבת/האורתוגונלית) של $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ על $W' = \text{span} \{v_1, v_2\}$

(כלומר מצאו $\pi_{W'}(v)$)

פתרון: נשתמש בוקטור הא"ג שמצאנו בסעיף הקודם שמקיימים כי $\text{span} \{v_1, v_2\} =$

$$\text{span} \{w_1, w_2\}$$

$$\pi_{W'}(v) = \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{\langle v, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

4. תהא $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ שעמודותיה בת"ל.

(א) הוכיחו כי $H^t H$ הפיכה. [הדרכה: הוכיחו תחילה כי $N(H^t H) = N(H)$.]
פתרון: נראה כי $N(H^t H) = N(H)$: הכיוון (\supseteq) ברור כי אם $Hx = 0$ אזי $H^t Hx = 0$. בכיוון (\subseteq) יהא x המקיים $H^t Hx = 0$ נכפיל ב x^t משמאל ונקבל $\|Hx\|^2 = x^t H^t Hx = 0$ כאשר הנורמה היא הנורמה המושרית מהמ"פ הסקלארית. ולכן $Hx = 0$ כנדרש.

כעת נסיק כי $rank(H^t H) = rank(H)$ לפי משפט הדרגה. כיוון שעמודות H בת"ל נקבל כי $rank(H) \geq n$ ולכן $rank(H^t H) = n$ כי זוהי מטריצה ריבועית מגודל $n \times n$. ומכאן ש $H^t H$ הפיכה.

(ב) עבור מערכת משוואת $Hx = b$ הוקטור $\tilde{x} = (H^t H)^{-1} H^t b$ נקרא קירוב הריבועים הפחותים (LSQ). הוכיחו כי $\min \left\{ \sum_{i=1}^m (b_i - [Hx]_i)^2 : x \in \mathbb{R}^n \right\}$ מתקבל ב \tilde{x} .

פתרון: ה $\min \left\{ \sum_{i=1}^m (b_i - [Hx]_i)^2 : x \in \mathbb{R}^n \right\}$ מתקבל עבור Hx שהוא $\pi_{C(H)}(b)$ כאשר \mathbb{R}^m עם הסקלארית. נוכיח כי $H\tilde{x} = \pi_{C(H)}(b)$. נסמן $\tilde{b} = H\tilde{x} = H(H^t H)^{-1} H^t b$ רואים לפי הגדרה כי $\tilde{b} \in C(H)$ נותר לבדוק כי $b - \tilde{b} \in C(H)^\perp = N(H^t)$ אכן

$$H^t (b - \tilde{b}) = H^t b - H^t \tilde{b} = H^t b - H^t H (H^t H)^{-1} H^t b = H^t b - H^t b = 0$$

5. מצאו דוגמה ל V ממ"פ ו $T : V \rightarrow V$ ה"ל ו W ת"מ שהוא T אינו אראנטי כך ש W אינו T^* -אינואראנטי.

פתרון: אם W T^* -אינואראנטי אזי W^\perp הוא $(T^*)^*$ אינואראנטי. לכן מספיק למצוא $T : V \rightarrow V$ כך ש W הוא T -אינואראנטי ו W^\perp הוא לא אינואראנטי.

למשל $V = \mathbb{R}^2$ עם הסקלארית ו $W = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ אזי $W^\perp = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ואם נגדיר $T : V \rightarrow V$ ע"י $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \end{pmatrix}$ אזי נקבל את הדרוש.

6. יהא $(V, \langle \rangle)$ ממ"פ ו יהא $W \leq V$ ת"מ

(א) הוכיחו כי לכל $w \in W$ ולכן $v \in V$ מתקיים כי $\langle w, \pi_W(v) \rangle = \langle w, v \rangle$
פתרון: יהיו w, v נתונים. אזי לפי משפט הפירוק הניצב קיים $w_1 \in W, w_2 \in W^\perp$ כך ש $v = w_1 + w_2$ ואז לפי הגדרה

$$\langle w, v \rangle = \langle w, w_1 + w_2 \rangle = \langle w, w_1 \rangle + \langle w, w_2 \rangle = \langle w, w_1 \rangle = \langle w, \pi_W(v) \rangle$$

(ב) יהא $T : V \rightarrow V$ אופרטור כך ש W הוא T -אינואראנטי. נגדיר $T|_W : W \rightarrow W$ את הצמצום של T ל W . הוכיחו כי $(T|_W)^* : W \rightarrow W$ היא $(T|_W)^* = \pi_W \circ (T^*|_W)$.
פתרון: יהיו $w, w' \in W$ נתונים.

$$\langle T|_W w, w' \rangle = \langle Tw, w' \rangle = \langle w, T^* w' \rangle = \langle w, (T^*|_W) w' \rangle = \langle w, \pi_W((T^*|_W) w') \rangle = \langle w, (\pi_W \circ (T^*|_W)) w' \rangle$$

כאשר המעבר האמצעי נכון סעיף קודם (עם $v = (T^*|_W) w'$) ולכן $(T|_W)^* = \pi_W \circ (T^*|_W)$