① 28.10.13
אינפי פונ'
הרצאה 3

A קבוצה קומפקטית - אם לכל סדרה $\{x_n\}\subset A$ יש תת סדרה x_{n_k} ואיבר $x\in A$ כך ש $x_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{} x$

הגדרה - קב' A נקראת חסומה אם קיים M כך ש $A\subset B_M(0)$

הגדרה - סגור של קבוצה $\bar{A}$ - הקבוצה הסגורה המינימלית (ביחס להכלה) שמכילה את A.

טענה - $\bar{A} = \{$ כל הגבולות החלקיים של סדרות ב A $\}$ אוסף הגבולות החלקיים

$= \{x : \exists x_1,x_2,\dots\in A : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x\}$

טענה - אם A קומפקטית אז היא סגורה וחסומה

הוכחה - • נניח בשלילה ש A לא חסומה. אז ניתן לבחור סדרה של נקודות $x_n\in A$ שמקיימות: $\|x_{n+1}\| > \|x_n\|+1$

ניתן לבחור $x_1\in A$ כי A לא ריקה (נאמרת A חסומה).

אם בחרנו $x_1 \dots x_n$, מכיוון ש $A\not\subset B_{\|x_n\|+1}(0)$ קיימת נקודה $x_{n+1}\in A$
כך ש $x_{n+1}\notin B_{\|x_n\|+1}(0)$, כלומר $\|x_{n+1}\| > \|x_n\|+1$

נראה של x_n אין תת סדרה מתכנסת.
זה נובע פשוט מכך של $\{\|x_n\|\}$ אין תת סדרה מתכנסת.
ומהטענה הכללית שאם $x_n\to x$ אז $\|x_n\|\to\|x\|$ [באופן כללי: $\big|\|x_n\|-\|x\|\big| \le \|x_n - x\|$]

• כעת נראה סגירות של A. נניח בשלילה ש A לא סגורה. אז ישנה סדרה $\{x_n\}\subset A$,
שמתכנסת ל $x\notin A$.
אבל אז כל תת סדרה של $\{x_n\}$ גם כן מתכנסת לx - בסתירה לקומפקטיות (כי $x\notin A$)

הכיוון ההפוך:

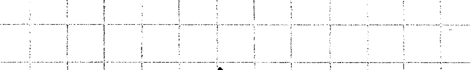
באופן כללי, קבוצה סגורה וחסומה יכולה לא להיות קומפקטית.
אבל ב $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ הדבר כן נכון.

נראה תחילה שהקטע $[0,1]$ קומפקטי.

כל מס' ממשי בין 0 ל1 ניתן לכתוב בצורה בינארית - $0.101001\dots$

משפט: (היינה-בורל-לבג): הקטע $[0,1]$ הוא קומפקטי.

הוכחה: בהינתן סדרה $\{x_n\}$, $x_n\in[0,1]$, נראה למצוא תת סדרה $\{x_{n_k}\}$ ואיבר $x\in[0,1]$
כך ש $x_{n_k}\to x$



נחלק את הקטע לשני חצאים
לפחות באחד החצאים יש אינסוף נקודות מהסדרה x_n.
נצמצם לנקודות שבחצי הזה, ונחלק אותו שוב לחצי, ונצמצם לחצי בו יש ∞ נקודות מהסדרה
בונים את הגבול נקודות חצי שמאלי - 0, חצי ימני - 1). $0.01..$
נמשיך לחלק לחצאים.. בכל שלב, מכיוון שהן בתת קטע שחילקנו ∞ נקודות מהסדרה - באחד החצאים יהיו גם כן ∞ נקודות מהסדרה.
נבנה את הגבול החלקי x ע"י שנרשום בפיתוח הבינארי של x 0 אם בחרנו בתת קטע השמאלי, 1 אם בחרנו בימני.
נבנה את תת הסדרה המתכנסת x_{n_k} ע"י שניקח בכל שלב איבר מהסדרה $\{x_n\}$ שנמצא בתת-קטע שבחרנו, כך שהאינדקסים יהיו עולים.

כך שבכל בוחר x מאותו תת קטע שבחרנו.

2 28.10.13
אנליזה
הרצאה 3

נשים לב שכל הנקודות שבחרנו בשלב ה n, והלאה מוכלות בקטע באורך $\frac{1}{2^n}$

x_{n_k} סדרת קושי [סדרת קושי - לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $m,n>N$ $|x_n-x_m|<\varepsilon$]
כי $|x_{n_k}-x_{n_m}| < 2^{-N}$ לכל $k,m>N$
(אם היינו מניחים כעת שב $\mathbb{R}$ כל סדרת קושי מתכנסת - סיימנו)

ניתן להמשיך גם בלי להניח את הגבול: אם הפיתוח הבינארי שבנינו הוא הגבול של x_{n_k} -
כי $|x_{n_k}-x| < 2^{-N}$ לכל $k>N$.

דרך שניה - $x = \bigcap I_k$. נסמן ב I_k את הקטע שבחרנו בשלב ה k.
(חיתוך של תת הקטעים מכיל איבר?)

<u>טענה:</u> תת קבוצה סגורה של קבוצה קומפקטית היא גם קומפקטית

<u>הוכחה:</u> A קומפקטית. $B\subset A$ סגורה. תהי $\{x_n\}$ סדרה של איברים ב B.
אז $\{x_n\}\subset A$, ולכן יש תת סדרה x_{n_k} מתכנסת ל x.
אבל B סגורה, $\{x_{n_k}\}\subset B$ לכן $x\in B$.

<u>מסקנה:</u> $A\subset\mathbb{R}$ קומפקטית אם"ם היא סגורה וחסומה.

<u>כיוון ראשון:</u> הראינו כבר שאם A קומפקטית אז היא סגורה וחסומה.

<u>כיוון שני:</u> כעת נניח ש A סגורה וחסומה. אז קיים M כך ש $A\subset[-M,M]$.
הקטע $[-M,M]$ קומפקטי [מהיינה - בורל].
לכן A תת קבוצה סגורה של קבוצה קומפקטית ולכן היא קומפקטית.

<u>טענה:</u> אותו משפט נכון גם ב $\mathbb{R}^n$.

<u>הוכחה:</u> תהי A סגורה וחסומה ותהי $\{x_k\}$ סדרה של איברים ב A.

$$x_k = (y_k^1, \dots, y_k^n)$$

נסתכל תחילה על הקורדינטה הראשונה של x_k $\Leftarrow$ נקבל סדרה $\{y_k^1\}$, זו סדרה חסומה ב $\mathbb{R}$.
לכן יש לה תת סדרה מתכנסת ל y^1.
כעת נסתכל על הקורדינטה השניה של האיברים מ x_k שבתת הסדרה הזו. זו שוב סדרה חסומה של מספרים ב $\mathbb{R}$ - נקח תת סדרה מתכנסת.
נמשיך קורדינטה קורדינטה ונקבל תת סדרה x_{n_k} שמקיימת $y^i_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} y^i$ ל $1\le i\le n$

ולכן נטען ש $x=(y^1,\dots,y^n)$ הגבול של x_{n_k}.
[בהינתן $\varepsilon>0$ קיימים $N_1,\dots,N_n$ כך שאם $k>N_i$, אז $|y^i_{n_k}-y^i|<\frac{\varepsilon}{n}$.
כעת נקח $N=\max\{N_1\dots N_n\}$ ואז לכל $k>N$ $\|x_{n_k}-x\|<\varepsilon$]

(3) 28.10.13

אנליזה פונ'

הרצאה 3

משפט (לא נוכיח): כדור היחידה $\overline{B_1(0)}$ במרחב נורמי אינסופי אינו קומפקטי

דוגמה: ב ℓ^2, או ℓ^∞, כדור היחידה אינו קומפקטי

$e_n = (0,0,\dots,0,1,0,0,\dots)$

מקום n

$\|e_n\|_{2,\infty} = 1$

$\|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2}$ $\quad n \neq m$

$\|e_n - e_m\|_\infty = 1$

כלומר, כל 2 וקטורים בסדרה $\{e_n\}$ רחוקים אחד מהשני $\Leftarrow$ אין תת סדרה מתכנסת

סדרת קושי במרחב נורמי היא סדרה $\{x_n\}$ שמקיימת שלכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $m,n>N$ מתקיים $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$

טענה: אם $\{x_n\}$ מתכנסת אז $\{x_n\}$ סדרת קושי

הוכחה: נניח $x_n \to x$ אז לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $n>N$, $\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$

אז לכל $n,m>N$ $\quad \|x_n - x_m\| \le \|x_n - x\| + \|x - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

הגדרה: מרחב נורמי נקרא שלם (complete) אם כל סדרת קושי מתכנסת

הגדרה: מרחב נורמי שלם נקרא מרחב בנך Banach

דוגמאות: הרציונלים אינם שלמים: $x_n = \{e - \frac{1}{n}\}$ לא מתכנסת ברציונלים

בממשים - לכל סדרת קושי יש גבול (ניתן להשתמש בזה כהגדרה של $\mathbb{R}$)

אם נקח את $(\ell_0, \|\cdot\|_\infty)$ $\quad \ell_0 = \{(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots,0,0,\dots)\}$, $x_i \in \mathbb{R}$ זה לא מרחב שלם

למשל $x_n = (1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},0,0,\dots)$, $\{x_n\}$ סדרת קושי אבל אין לה גבול ב ℓ_0

ב ℓ_2 או ב ℓ_∞, ל $\{x_n\}$ יש גבול והוא $x = (1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\dots)$

הפולינומים רציפים ב $(C[0,1],\|\cdot\|_\infty)$ אבל הפולינומים ב $[0,1]$ עם נורמת sup אינם מרחב שלם

דוגמאות למרחבים שלמים: ℓ^p, $C[0,1]$, $\mathbb{R}^n$

נוכיח ש $C[0,1]$ שלם:

$C[0,1] \Leftarrow f_n \in C[0,1]$ סדרת קושי לכל $x \in [0,1]$

$\{f_n(x)\}$ גם כן סדרת קושי ב $\mathbb{R}$. לכן יש לה גבול.

נגדיר $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. נראה ש $\|f_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

תרגיל - (רמז - תכונות בממ"ש)

(4) 28.6.13
אנליזה בית הרצאה

[illegible]

הגדרה: פונקציה $f: E_1 \to E_2$ נקראת רציפה אם $f^{-1}(U)$ קבוצה פתוחה לכל $U \in E_2$ פתוחה.

תמונה הפוכה (מקור) $f^{-1}(A) = \{ x \in E_1 : f(x) \in A \}$

משפט: פונקציה $f: E_1 \to E_2$ רציפה אם"ם לכל $x_n \to x$ ב E_1 (כלומר $\|x_n - x\|_{E_1} \to 0$) מתקיים $\|f(x_n) - f(x)\|_{E_2} \to 0$

הוכחה: כיוון $\Rightarrow$: נניח ש f רציפה, ונניח ש $\|x_n - x\|_{E_1} \to 0$. נראה ש $\|f(x_n) - f(x)\|_{E_2} \to 0$.

~~$\|x_n - x\| \to 0$, לכן בהינתן ε קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $\|x_n - x\|_{E_1} < \varepsilon$~~

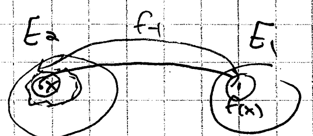
~~כלומר $x_n \in B_\varepsilon(x)$~~

בהינתן $\varepsilon > 0$ נקח $U = B_\varepsilon(f(x))$. מהגדרת רציפות, $f^{-1}(U)$ פתוחה.

$x \in f^{-1}(U)$, ולכן קיים $\delta > 0$ כך ש $B_\delta(x) \subset f^{-1}(U)$ (קבוצה פתוחה שמכילה את x מכילה גם כדור קטן סביב x).

לכן אם $\|y - x\| < \delta$ אז $y \in f^{-1}(U)$ כלומר $f(y) \in U$,

לכן $\|f(y) - f(x)\|_{E_2} < \varepsilon$



כיוון $\Leftarrow$: תרגיל.

משפט: פונקציה רציפה על קבוצה קומפקטית A (ממשית $\mathbb{R}^d$) מקבלת מקסימום ומינימום

הוכחה: נסתכל על קבוצת הערכים ש $f(x)$ מקבלת ב A.
ונסתכל על $M = \sup_{x \in A} f(x)$

יש 2 אפשרויות: M סופי או M אינסופי

- אם $M = \infty$ אז יש סדרה של נקודות $x_n \in A$ כך ש $f(x_{n+1}) - f(x_n) > 1$.

  מקומפקטיות, ל $\{x_n\}$ יש תת סדרה מתכנסת $x_{n_k} \to x$, $x \in A$

  אבל אז מרציפות $f(x_{n_k}) \to f(x)$

  וזאת סתירה מכיוון ש $f(x_n) \to \infty$

  מסקנה: $M < \infty$

- אם $M < \infty$, $M = \sup f(x)$. לכן לכל n קיים $x_n \in A$ כך ש $|f(x_n) - M| < \frac{1}{n}$

  מקומפקטיות יש תת סדרה מתכנסת $x_{n_k} \to x$. $[x \in A]$

  ומרציפות $f(x_{n_k}) \to f(x)$

  לכן $f(x) = M$ וה sup מתקבל