① 29.12.13
[illegible]
תרגול 10

<u>תזכורת:</u> אם ל-f יש הצגה קנונית כ $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n I_{E_n}(x)$

- לכל $n\geq 1$ $E_n\neq\emptyset$
- לכל $i\neq j$ $E_i\cap E_j=\emptyset$
- לכל $i\neq j$ $a_i\neq a_j$

אז:
$$\int_A f\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\mu(E_n\cap A)$$

(שאין לפונק' הזו אינטגרל לפי רימן כמו באינפי)

<u>דוגמא!</u> נגדיר פונקציה f בקטע $[0,1]$ לפי $f(x)=\begin{cases}1 & x \text{ רציונלי}\\ 0 & x \text{ לא רציונלי}\end{cases}$

נחשב אינטגרל לבג של f. נציג את f בצורה קנונית:
$$f(x)=1\cdot I_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)+0\cdot I_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}(x)$$

לכן:
$$\int_{[0,1]} f\,d\mu=1\cdot\mu([0,1]\cap\mathbb{Q})+0\cdot\mu([0,1]\setminus\mathbb{Q})=0$$

נשאר לחשב את $\mu([0,1]\cap\mathbb{Q})$ כיוון שהקבוצה $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ בת מניה (כי $\mathbb{Q}$ בת מניה)
אז אפשר לרשום $[0,1]\cap\mathbb{Q}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$

ולכן!
$$\mu([0,1]\cap\mathbb{Q})=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}[x_n,x_n]\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\mu([x_n,x_n])=\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-x_n)=\sum_{n=1}^{\infty}0=0$$

<u>אינטגרל לבג לפונקציה מדידה כלשהי</u>

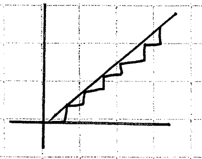
פונ' f מדידה נקראת אינטגרבילית על הקבוצה A אם קיימת סדרה של פונקציות פשוטות האינטגרביליות על A ומתכנסות במ"ש ל f על הקבוצה A.
ואז האינטגרל של f מוגדר כ:
$$\int_A f\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_A f_n\,d\mu$$
את זה אנחנו כבר יודעים לחשב

<u>דוגמא:</u> נחשב אינטגרל לבג של הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}x & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\end{cases}$ ומניחים ש f מוגדרת בקטע $[0,1]$

<u>פתרון:</u> נגדיר $g(x)=\begin{cases}x & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ 0 & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ וגם g מוגדרת בקטע $[0,1]$

רואים שמתקיים $f(x)+g(x)=x$. כלומר: $f(x)=x-g(x)$
וגם יודעים ש g פונקציה פשוטה
אז כדי למצוא סדרה של פונקציות שיתכנסו במ"ש ל f מספיק למצוא סדרה של פונקציות פשוטות שיתכנסו במ"ש ל $h(x)=x$

(2) 29.12.13
פונקציונלית
תרגול 10



קל לבדוק שהפונקציות $h_n(x)=\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}$ מקיימות:

$$\sup_{x\in[0,1]} |h_n(x)-x| = \frac{1}{n}$$

ולכן $h_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} h$ ולכן הפונקציות $f_n(x)=h_n(x)-g(x)$ הן פונקציות פשוטות ששואפות ל-f במ"ש.

ולכן - $$\int_{[0,1]} f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} h_n(x)-g(x)$$

וכיוון ש $\int_{[0,1]} g\,d\mu=0$ (מתאפס רוב..) נקבל ש:

$$\int_{[0,1]} f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\,d\mu$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(0\cdot\frac1n+\frac1n\cdot\frac1n+\frac2n\cdot\frac1n+\cdots+\frac{n-1}{n}\cdot\frac1n\right)$$

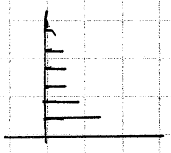
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\cdot n}{2n^2} = \frac12$$

<u>משפט ההתכנסות הנשלטת:</u>

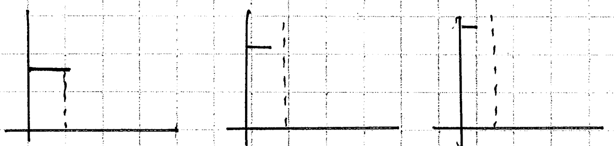
אם סדרה של פונקציות מדידות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת בקבוצה A ל-f התכנסות נקודתית ($\lim_{n\to\infty} f_n = f$) ולכל n מתקיים $|f_n(x)| \le \underbrace{Q(x)}_{\text{פונ' שולטת}}$ כאשר Q פונ' אינטגרבילית על A, $\int_A Q\,d\mu<\infty$ ו-Q מדידה.

אז f אינטגרבילית ומתקיים $\int_A f_n\,d\mu \xrightarrow{n\to\infty} \int_A f\,d\mu$



<u>הערה:</u> התנאי שההתכנסות נשלטת הוא הכרחי!

אם ניקח את הסדרה: $f_k(x)=\begin{cases}k & 0<x<\frac1k\\ 0 & \frac1k<x\le 1\end{cases}$ בקטע $[0,1]$



אז: $\lim_{k\to\infty} f_k(x)=0$

עבור x מסוים, החל מ-k מסוים ערך הפונ' הוא 0.

(שרטוטים של f_k כש-k גדל, משמאל לימין)

[אין פונ' שחוסמת את כל ה-$f_k(x)$] ולכן תוצאת המשפט לא מתקיימת

$$\int_0^1 f_k(x)\,dx = k\cdot\frac1k = 1 \neq \int_0^1 \lim f_k\,d\mu = \int_0^1 0\,d\mu = 0$$

האינטגרל של הגבול לא שווה לגבול האינטגרלים

29.12.13
סוף תרגול 10

הערה: חשוב שהפונקציה תהיה אינטגרבילית. כלומר $\int Q \, d\mu < \infty$

כי ניקח למשל $f_n(x) = \frac{x}{n^2} \cdot I_{[0,n]}(x)$ $\quad x \ge 0$

f_n מקבלת את הערך הכי גדול ב $x=n$. והערך המקס' הגדול הוא $\frac{1}{n}$

$\Leftarrow$ $|f_n(x)| \le \frac{1}{n}$ ולכן הפונקציה $Q=1$ חוסמת את כל הפונקציות f_n.
($\frac{1}{n} \le 1$ לכל n)

! $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ [כי $f_n(x) = \frac{x}{n^2}$ בקטע $[0,n]$]

אז $\int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int_0^\infty 0 \, d\mu = 0$

מצד שני, $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x) \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{x}{n^2} \, d\mu$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{2n^2} \Big|_{x=0}^{x=n} = \frac{1}{2}$$

גם במקרה זה המשפט לא מתקיים כי Q לא אינטגרבילית, כי $\int_0^\infty 1 \, d\mu = \infty$