

בוחר מבווא לחוגים ומודולים תשפב

15.5.2022

מרצה: פרופסור מיכאל שיין. מתרגלת: תמר בר-און.
הנחיות:

- ענו על כל השאלות. זמן מוקצב: שעה וחצי.
- ניקוד שווה לכל אחד מהסעיפים של שאלה 1, הסעיפים של שאלה 3 ושאלה 2. ניקוד מקסימאלי: 110.
- כל ציון מעל 100 יעוגל ל 100.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.

בהצלחה!

1. יהא R חוג, ו I אידיאל של R . נגדיר את המאפס של I להיות

$$\text{Ann}(I) = \{r \in R \mid \forall x \in I : rx = 0\}$$

ענו על הבאים:

- (א) הוכיחו: $\text{Ann}(I)$ הוא אידיאל של R (שימו לב ש R לא בהכרח קומטטיבי).
- (ב) נניח כי R קומטטיבי.
הוכיחו: R הוא תחום שלמות אם ורק אם לכל אידיאל I שונה מ $\{0\}$ מתקיים $\text{Ann}(I) = \{0\}$.
2. יהא R חוג קומטטיבי ו I, J אידיאלים של R . נסמן ב

$$\sqrt{I} = \{r \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : r^n \in I\}$$

את הרדיקל של I . הוכיחו: \sqrt{I}, \sqrt{J} קו-מקסימאלים אם ורק אם I, J קו-מקסימאלים.
תזכרות: אידיאלים I_1, I_2 נקראים קו-מקסימאלים אם $I_1 + I_2 = R$.

3. יהא R תחום שלמות ותחום פריקות (תחום פריקות הוא חוג בו כל איבר ניתן להצגה [לא בהכרח יחידה] כמכפלה של גורמים אי-פריקים).

- (א) יהא P אידיאל ראשוני של R ששונה מ R ושונה מ $\{0\}$. הוכיחו: קיים איבר אי-פריק ב P .
- (ב) יהא a איבר לא הפיך ב R המקיים כי האידיאל שנוצר על ידו, $\langle a \rangle$, מכיל אידיאל ראשוני P שונה מ $\{0\}$.
הוכיחו: a איבר ראשוני.