

פתרון תרגיל 1 - טופולוגיה

שאלה 1

א. יהי $y \in f(f^{-1}(A))$, אזי קיים $x \in f^{-1}(A)$ כך ש- $f(x) = y$ וכן
 $f(x) \in A \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$, ונקבל בסה"כ $y \in A$.

ב. כבר יש לנו הכלה בכיוון אחד, נוכיח את ההכלה בכיוון השני: $f(f^{-1}(A)) \supseteq A$.
יהי $y \in A$. מכיוון ש f "על" נקבל שקיים $x \in f^{-1}(A)$ כך ש- $f(x) = y$. מכאן
 $y \in f(f^{-1}(A))$.

דוגמא נגדית במקרה בו f לא "על". נניח $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י
 $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, אזי $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{0\} \neq \mathbb{R}$.

ג. יהי $x \in B$, אזי $f(x) \in f(B)$ ולכן $x \in f^{-1}(f(B))$.

ד. כבר יש לנו הכלה בכיוון אחד, נוכיח את ההכלה בכיוון השני:
 $f^{-1}(f(B)) \subseteq B$. יהי $x \in f^{-1}(f(B))$, אזי $f(x) \in f(B)$. נראה שבהכרח $x \in B$.
אחרת, קיים $x \neq x_1 \in B$ כך ש- $f(x) = f(x_1)$. אך זו סתירה לכך ש- f חח"ע.
מכאן $x \in B$.

דוגמא נגדית במקרה בו f לא חח"ע. אותה דוגמא כמו בסעיף ב' רק שהפעם
נקח $B = \{5\}$ ומתקיים $f^{-1}(f(B)) = f^{-1}(f(\{5\})) = f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R} \neq \{5\}$.

שאלה 2

א. יש להראות שמתקיים $f^{-1}[A^c] = (f^{-1}[A])^c$
נראה הכלה דו כיוונית:

⊆: יהי $x \in f^{-1}[A^c]$ אזי

$$f(x) \in A^c \rightarrow f(x) \notin A \rightarrow x \notin f^{-1}[A] \rightarrow x \in (f^{-1}[A])^c$$

⊇: יהי $x \in (f^{-1}[A])^c$ אזי

$$x \notin f^{-1}[A] \rightarrow f(x) \notin A \rightarrow f(x) \in A^c \rightarrow x \in f^{-1}[A^c]$$

ב. תנאי הכרחי ומספיק הוא ש- f חח"ע ועל.

מספיק: נראה ש $f(A^c) = (f(A))^c$.

⊆: יהי $y \in f(A^c)$ אזי קיים $x \in A^c$ כך ש $f(x) = y$. נראה שבהכרח

$y \in (f(A))^c$. אחרת, $y \in f(A)$. לכן קיים $x_1 \in A$ כך ש $f(x_1) = y$ ומכאן

$f(x) = f(x_1)$ ובשל חח"ע $x = x_1$. אך זה לא יתכן כי $x \in A^c$ ו- $x_1 \in A$.

⊇: יהי $y \in (f(A))^c$ אזי $y \notin f(A)$ מכיוון ש f 'על' בהכרח קיים $x \in X$

כך ש- $f(x) = y$. מכיוון ש $y \notin f(A)$ נקבל כי $y \in f(A^c)$.

הכרחי: אם f אינה 'על' אזי $f(\emptyset) \neq Y = (f(\emptyset))^c$ אם f אינה

חח"ע אזי קיימים $x_1 \neq x_2$ כך ש $f(x_1) = f(x_2)$ אבל אז נקבל

$$\text{ומכאן } \begin{cases} f(x_2) \in f(\{x_1\}^c) \\ f(x_2) \notin (f(\{x_1\}))^c \end{cases} \cdot f(\{x_1\}^c) \neq (f(\{x_1\}))^c$$

ג. נוכיח ש $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ לכל $A, B \subseteq X$. יהי $y \in f(A) \setminus f(B)$

אזי קיים $x \in A$ כך ש $f(x) = y$ וכן $y \notin f(B)$. מכאן $x \in A \setminus B$ ולכן

$$y \in f(A \setminus B)$$

ד. מ"ל (עפ"י ג') ש- $f(A) \setminus f(B) \supseteq f(A \setminus B)$ לכל $A, B \subseteq X \Leftrightarrow f$ חח"ע.

(\Rightarrow): נניח $A, B \subseteq X$. מכיוון ש- $A \setminus B \subseteq A$ נקבל $f(A \setminus B) \subseteq f(A)$.

נראה שאם $y \in f(A \setminus B)$ אזי $y \notin f(B)$. אחרת $y \in f(A \setminus B) \cap f(B)$

ומכאן קיימים $x_1 \in A \setminus B, x_2 \in B$ כך ש $f(x_1) = f(x_2) = y$ ובשל החח"ע

של f נקבל $x_1 = x_2$. וזו כמובן סתירה לכך ש- $x_1 \notin B, x_2 \in B$. מכאן

$$f(A \setminus B) \subseteq (f(B))^c$$

$$\cdot f(A \setminus B) \subseteq f(A) \cap (f(B))^c = f(A) \setminus f(B)$$

(\Leftarrow): אם f לא חח"ע אזי קיימים $x_1 \neq x_2 \in X$ כך ש $f(x_1) = f(x_2)$ אבל
 אז $f(\{x_2\}) \setminus f(\{x_1\}) = \emptyset$ $f(\{x_2\}) \cap f(\{x_1\}) \neq \emptyset$ בסתירה לנתון
 (עבור $A = \{x_2\}, B = \{x_1\} \subseteq X$).

שאלה 3

(א) הוכחה באינדוקציה- הטענה טריויאלית עבור בסיס האינדוקציה $n = 2$.

נניח נכונות עבור $n \geq 2$ נקבל מאי שוויון המשולש ומהנחת האינדוקציה ש:

$$d(x_1, x_{n+1}) \leq d(x_1, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})$$

ולכן הטענה נכונה עבור $n+1$.

(ב) שקול להוכיח $-d(x, y) \leq d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y)$.

מאי שוויון המשולש נקבל $d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y)$ באופן דומה (תוך שימוש בתכונת הסימטריות בנוסף) נקבל:

$$-d(x, y) \leq d(x, z) - d(y, z) \text{ ולכן גם } d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) = d(x, y) + d(x, z)$$

שאלה 4

כל התכונות פרט לאי שוויון המשולש טריויאליות. נראה ש

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$$

אם $x = z$ אז מתקיים $d(x, z) = 0$ והטענה ברורה. אם $x = y$ אז $d(x, z) = d(y, z)$ ושוב הטענה ברורה. אם $y = z$ שוב ניתן להראות בצורה דומה שהטענה נכונה.

נניח אם כן ש $x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z$.

נניח בשלילה ש $d(x, z) > \max\{d(x, y), d(y, z)\}$. אזי $d(x, y) < d(x, z)$ וגם

$$d(y, z) < d(x, z)$$

מאי $j_1 = \min\{j \in \mathbb{N} : x_j \neq z_j\}, j_2 = \min\{j \in \mathbb{N} : x_j \neq y_j\}, j_3 = \min\{j \in \mathbb{N} : y_j \neq z_j\}$

השוויון $d(x, y) < d(x, z)$ נקבל ש $\frac{1}{\min\{j \in \mathbb{N} : x_j \neq z_j\}} > \frac{1}{\min\{j \in \mathbb{N} : x_j \neq y_j\}}$ ומכאן

$j_1 < j_2$. כעת, $j_2 = \min\{j \in \mathbb{N} : x_j \neq y_j\}$ ולכן $x_{j_1} = y_{j_1}$. באופן דומה מראים מאי

השוויון השני ש $j_1 < j_3$ ומכיון ש $j_3 = \min\{j \in \mathbb{N} : y_j \neq z_j\}$ מסיקים ש $y_{j_1} = z_{j_1}$. אבל

אז נקבל בסה"כ ש $x_{j_1} = z_{j_1}$ בסתירה לכך ש $j_1 = \min\{j \in \mathbb{N} : x_j \neq z_j\}$.

שאלה 5

סימטריות: מ"ל שלכל $x, y \in X$ מתקיים $d(y, x) \leq d(x, y)$ (למה?).

כדי להוכיח זאת נציב $z = x$ בתנאי השני ונקבל $d(y, x) \leq d(x, y) + d(x, x)$.

מהתנאי הראשון $d(x, x) = 0$ ומכאן $d(y, x) \leq d(x, y)$ כדרוש.

ניתן להיעזר כעת בסימטריות ובתנאי השני כשמחליפים את התפקידים של y ו

z (מותר לעשות זאת כי התנאי השני מתקיים לכל $x, y, z \in X$) כדי לקבל את

אי שוויון המשולש בנוסח $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

אי שליליות: נראה שלכל $x, z \in X$ מתקיים $0 \leq d(z, x)$. ניתן להציב בתנאי השני

$y = x$. נקבל כעת $d(x, x) \leq d(z, x) + d(z, x) = 2d(z, x)$. מהתנאי הראשון

$d(x, x) = 0$ ולכן $0 \leq 2d(z, x)$. מכאן $0 \leq d(z, x)$ כדרוש.

שאלה 6

1. לא מטריקה. למשל מתקיים $(1, 3) \neq (1, 4)$ אבל $d((1, 3), (1, 4)) = 0$.

2. לא מטריקה. למשל מתקיים $(1, 3) \neq (1, 4)$ אבל $d((1, 1), (1, 1)) = 4 \neq 0$.

3. זוהי אכן מטריקה. מאי שליליות של המטריקה d נקבל את אי שליליות

של D ובנוסף:

$$D((x, y), (x', y')) = 0 \Leftrightarrow d(x, x') + d(y, y') = 0 \Leftrightarrow d(x, x') = 0 \wedge d(y, y') = 0$$

מכיון ש d מטריקה נקבל ש

$$d(x, x') = 0 \wedge d(y, y') = 0 \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y' \Leftrightarrow (x, x') = (y, y')$$

בסה"כ $D((x, y), (x', y')) = 0 \Leftrightarrow (x, x') = (y, y')$. הסימטריות של D נובעת

בצורה ברורה מהסימטריות של d .

אי שוויון המשולש: $D((x, y), (x'', y'')) = d(x, x'') + d(y, y'')$. מאי שוויון

המשולש של d נקבל: $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$ וכך

$d(y, y'') \leq d(y, y') + d(y', y'')$. לכן,

$$\begin{aligned} D((x, y), (x'', y'')) &= d(x, x'') + d(y, y'') \leq d(x, x') + d(x', x'') + d(y, y') + d(y', y'') = \\ &= (d(x, x') + d(y, y')) + (d(x', x'') + d(y', y'')) \leq D((x, y), (x', y')) + D((x', y'), (x'', y'')) \end{aligned}$$