

אלגברה לינארית 2 | תש"ף מועד ב'

פתרון המבחן | יונתן סמידוברסקי

שאלה 1

(סעיף א)

תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ נמצא נוסחה מפורשת עבור A^n .
ראשית, נלכסן.

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ -1 & x-3 & -2 \\ -1 & -2 & x-3 \end{pmatrix} = (x-1) \cdot \det \begin{pmatrix} x-3 & -2 \\ -2 & x-3 \end{pmatrix} = (x-1) \cdot (x^2 - 6x + 9 - 4) = (x-1)^2(x-5)$$

מוצאים בסיסים למרחבים עצמיים

$$V_1 = N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_5 = N \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ניתן לראות שהריבוי הגיאומטרי והאלגברי של כל ערך עצמי שווים ולכן לכסינה, מחשבים את ההפיכה ומקבלים

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D$$

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^n = (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1}) \cdot \dots \cdot (PDP^{-1}) = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(A^n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \cdot 5^n + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \cdot 5^n + \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \cdot 5^n + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cdot 5^n - \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \cdot 5^n - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cdot 5^n + \frac{1}{2} \end{pmatrix}) \text{ (אפשר גם להמשיך לפתח ולהגיע ל)}$$

שאלה 2

(סעיף א)

יהי V מ"מ מעל \mathbb{C} כך ש T צמוד לעצמו.

יהי $v \in V$ כך ש $T^n(v) = 0$ נוכיח כי $Tv = 0$.

הוכחה T צמוד לעצמו ולכן נורמלי, כמו כן, מעל \mathbb{C} כל פולינום הוא מ"ל וסך הכל מקבלים ש T ניתן ללכסון אוניטרי. כעת קיים בסיס אורתונורמלי ל V , $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ כך שהוא גם מלכסן את ההעתקה (ההעתקה לפי בסיס זה אלכסונית) כלומר $Tv' = \lambda v'_i$ לכל $v' \in B$ ו $\lambda \in \sigma(T)$. כעת $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$.

$$0 = T^n(v) = \alpha_1 T^n(v_1) + \dots + \alpha_m T^n(v_m) = \alpha_1 \lambda_1^n v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m^n v_m$$

(הערה λ_i הוא הערך העצמי המתאים ל v_i)

ומהיותו של B בסיס ובפרט בת"ל מתקיים, לכל $1 \leq i \leq m$ כי $\alpha_i \lambda_i^n = 0$

ובפרט חייב להתקיים $\alpha_i \lambda_i = 0$ כלומר

$$T(v) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m v_m = 0$$

שאלה 3

(סעיף א)

יהי $V = \mathbb{R}^5$ ממ"פ מעל \mathbb{R} עם הממ"פ הסטנדרטית.

$$T \text{ צמודה לעצמה משום שלוקחים את הבסיס הסטנדרטי } E = \{e_1, \dots, e_5\} \text{ (הוא בפרט אורתונורמלי)}$$
$$[T]_E = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ תהי } T: V \rightarrow V \text{ ויהי המוגדר לפי } Tv = Av$$

ואז $[T]_E^* = \overline{[T]_E}^t = A$ ומתקיים $[T]_E^* = A$ וראינו בהרצאה, כי T צמודה לעצמה אם המטריצה המייצגת לפי בסיס אורתונורמלי צמודה לעצמה.

(סעיף ב)

נמצא פולינום אופייני ומינימלי של A (זה שקול מבחינת הבסיס הסטנדרטי E שהגדרנו בסעיף קודם) נשים לב כי

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ולפי משפט מהרצאה, הפולינום האופייני של A הינו מכפלת הפ"א של שתי המטריצות.

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ -1 & -1 & x-2 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} x-2 & -3 \\ -3 & x-2 \end{pmatrix} = (x+1)(x-4)(x-1)^2(x-5)$$

כמו כן, הפולינום המינימלי הוא lcm של הפולינומים המינימליים של הבלוקים.

$$\text{ראשית, הפולינום האופייני של } A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ הוא } (x-4)(x-1)^2$$

ולכן $m_{A_1}(x) \in \{(x-4), (x-1), (x-1)^2, (x-4)(x-1)^2\}$ ובעזרת אלמינציה (פולינומים ממעלה קטנה לגדולה), מגיעים לכך שהמינימלי הוא $m_{A_1} = (x-4)(x-1)$

$$\text{הפולינום האופייני של } A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ הוא } (x-5)(x+1)$$

ולכן $m_{A_2} \in \{(x-5), (x+1), (x-5)(x+1)\}$ ובצורה דומה שוללים את הראשונים ומגיעים ל- $m_{A_2} = (x-5)(x+1)$ כעת $m_A = lcm\{m_{A_1}, m_{A_2}\} = (x+1)(x-4)(x-1)(x-5)$

(סעיף ג)

$A = [T]_E$ צמודה לעצמה ולכן נורמלית, בנוסף ראינו שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים ולכן לכסינה אוניטרית.

משום שמדובר במטריצת בלוקים ניקח $P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$

כאשר P_1 מלכסנת את A_1 ו P_2 מלכסנת את A_2

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ואז $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מפעילים גראם שמידט לקבלת בסיס אורתוגונלי ואז ננרמל לקבלת

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

שאלה 4

הוכיחו/הפריכו:

(סעיף א)

יהי $T: V \rightarrow V$ אופרטור אוניטרי ויהי $W \leq V$ תת מרחב אינווריאנטי, אז W^\perp אינווריאנטי. הוכחה יהי $w' \in W^\perp$ ו $w \in W$. מהיותה של T אוניטרית, היא הפיכה. ניקח $u \in V$ כך ש $Tu = w$

$$\langle Tw', w \rangle = \langle Tw', Tu \rangle = \langle w', TT^*u \rangle = \langle w', u \rangle = 0$$

כי $u \in V$ ו $w' \in W^\perp$. סך הכל קיבלנו $Tw' \in W^\perp$ וסיימנו.

(סעיף ב)

אם $T: V \rightarrow V$ אופרטור המקיים $T^2 = T$ אזי T ניתן ללכסון.

הוכחה בעזרת העברת אגפים נקבל $T^2 - T = 0$

כעת $p(x) = x^2 - x = x(x - 1)$ הוא פולינום מאפס להעתקה, ולכן הפולינום המינימלי מחלק אותו. נקבל

$$m_A(x) \in \{x, x - 1, x(x - 1)\}$$

ובעבור כל אחד מהמקרים הפולינום המינימלי מתפרק לגורמים לינאריים ולפי משפט לכסון.

(סעיף ג)

יהי V מ"פ ויהיו $W, U \leq V$ תתי מרחב אזי $(W \cap U)^\perp = W^\perp \cap U^\perp$

הפרכה

נבחר $W = V, U = \{0\}$

כעת מצד אחד, (לפי משפט הפירוק הניצב)

$$W^\perp \cap U^\perp = V^\perp \cap V = \{0\}$$

מצד שני,

$$(W \cap U)^\perp = (V \cap \{0\})^\perp = \{0\}^\perp = V$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך שלכל $v \in V$ מתקיים $\langle v, 0 \rangle = 0$. וסיימנו.

שאלה 5

נתון שעבור $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ מתקיים $\sigma(A) = \{-1, 0, 1\}$

(סעיף א)

A סימטרית-לפעמים כן ולפעמים לא

למשל ניקח $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ שאינה סימטרית

ו $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ שכן סימטרית.

(סעיף ב)

A ניתנת ללכסון-לכל A

המטריצה בגודל 3×3 ויש לה 3 ערכים עצמיים ולכן סיימנו, לפי משפט מהרצאה.

(סעיף ג)

$A^2 = A - A$ לא מתקיים לאף A

הוכחה

טענת עזר: נניח $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ אזי $\sigma(A^2) = \{\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2\}$
משום שלכל $\lambda \in \sigma(A)$ מתקיים

$$Av = \lambda v$$

נכפול את שני הצדדים ב A ונקבל

$$A(Av) = \lambda(Av)$$

$$A^2v = \lambda^2v$$

וכעת במקרה שלנו $\sigma(A) = \{-1, 0, 1\}$ ולכן $\sigma(A^2) = \{0, 1\}$. יש להם ספקטרומים שונים ובפרט הם שונים $A^2 \neq A$.