הרצאה 9

הגדרה

יהיו A,B קבוצות. נסמן את קבוצת הפונקציות מ A ל B ב B^A.

משפט

אם A,B קבוצות סופיות, ו B אינה ריקה, אז B^A סופית ו $\left|B^A\right|=\left|B\right|^{|A|}$.

הוכחה

נסמן $A=\left\{a_1,a_2,...,a_n\right\},B=\left\{b_1,b_2,...b_m\right\}$ לכל איבר a_i בתחום יש איבר אחד ויחיד כך ש $\left(a_i,b_j\right)\in G$ ולכן יש ל $a_i,1\le i\le n$ m אפשרויות. סה"כ האפשרויות שנקבל הוא m^n.

נכליל את המשפט לקבוצות אינסופיות ועבור שתי קבוצות A,B נסמן $\left|B^A\right|=\left|B\right|^{|A|}$.

טענה

הגדרת העוצמה של קבוצת הפונקציות מ A ל B מוגדרת היטב. ז"א אם $\left|A\right|=\left|C\right|\wedge\left|B\right|=\left|D\right|$ אז $\left|B^A\right|=\left|D^C\right|$.

הוכחה

$\left|A\right|=\left|C\right|$ ולכן קיימת פונקציה חח"ע ועל $f:A\to C$.

$\left|B\right|=\left|D\right|$ ולכן קיימת פונקציה חח"ע ועל $g:B\to D$.

נגדיר פונקציה $h:B^A\to D^C$ עבור $t:A\to B$ נגדיר $h\left(t\right):C\to D$ להיות $g\circ t\circ f^{-1}$.

מכיוון ש g,f חח"ע ועל הפונקציה h חח"ע ועל.

נוכיח חח"ע

$g\circ t_1\circ f^{-1}=g\circ t_2\circ f^{-1}\Leftarrow g^{-1}\circ g\circ t_1\circ f^{-1}\circ f=g^{-1}\circ g\circ t_2\circ f^{-1}\circ f\Leftarrow t_1=t_2$.

נוכיח על

יהי $s\in D^C$ אז $g^{-1}\circ s\circ f$. $h\left(g^{-1}\circ s\circ f\right)=g\circ\left(g^{-1}\circ s\circ f\right)\circ f^{-1}=s$.

משפט

לכל קבוצה A $\left|P\left(A\right)\right|=2^{|A|}$.

הוכחה

תהיי $g:P\left(A\right)\to\left\{0,1\right\}^A$ המוגדרת ע"י $g\left(B\right)=\chi_B$ נוכיח ש g פונקציה חח"ע ועל.

חד חד ערכית

יהיו $B_1,B_2\in P\left(A\right)$ כך ש $g\left(B_1\right)=g\left(B_2\right)$ נוכיח ש $B_1=B_2$. יהי $b\in B_1$ על פי הגדרת הפונקציה האפיינית $\chi_{B_1}\left(b\right)=1$ מכיוון ש $g\left(B_1\right)=g\left(B_2\right)$ נקבל ש $\chi_{B_1}=\chi_{B_2}$ ולכן $\chi_{B_2}\left(b\right)=1$ ז"א $b\in B_2$.

קיבלנו ש $B_1\subseteq B_2$ באותו אופן ניתן להראות ש $B_2\subseteq B_1$.

על

תהיי $f\in\left\{0,1\right\}^A$ נתבונן בקבוצה $C=\left\{x\in A\middle|f\left(x\right)=1\right\}$ הפונקציה $\chi_C=f$ ולכן $g\left(C\right)=f$.

משפט

$א=10^{\aleph_0}$.

הוכחה

מכיוון ש $\left|(0,1)\right| = \aleph$ ו $\left|\mathbb{N}\right| = \aleph_0$ ובעזרת משפט קנטור ברנשטיין יש להראות שקיימת פונקציה חח"ע מ $(0,1)$ ל ${z_{10}}^{\mathbb{N}}$ ופונקציה חח"ע מ ${z_{10}}^{\mathbb{N}}$ ל $(0,1)$.

תהיי $f:(0,1)\to {z_{10}}^{\mathbb{N}}$ יהי $a\in(0,1)$ (לכל מספר שאינו מסתיים בזנב אינסופי שכולו 9 יש פיתוח יחיד) ז"א $a=0.a_1a_2a_3....$ (ללא זנב אינסופי שכולו 9) כאשר לכל $i\in\mathbb{N}$ מתקיים $0\le a_i\le 9$.
נגדיר את הפונקציה ע"י $f(a)=g$ כאשר $g:\mathbb{N}\to z_{10}$ מוגדרת ע"י $g(i)=a_i$. נוכיח ש f חח"ע.
יהי $a,b\in(0,1)$ כך ש $a\ne b$ ז"א קיים $i\in\mathbb{N}$ כך ש $s=a_i\ne b_i=t$. $f(a)$ היא פונקציה שעבורה $g_a(i)=s$ ו $f(b)$ היא פונקציה שעבורה $g_b(i)=t$ מכיוון ש $g_a(i)\ne g_b(i)$ נקבל ש $f(a)\ne f(b)$.

תהיי $f:{z_{10}}^{\mathbb{N}}\to(0,1)$ המוגדרת ע"י $f(g)=0.g(1)0g(2)0g(3)0g(4)0...$. נוכיח ש f חח"ע.
נניח ש $g_1,g_2\in {z_{10}}^{\mathbb{N}}$ כך ש $g_1\ne g_2$ ז"א קיים $i\in\mathbb{N}$ כך ש $g_1(i)\ne g_2(i)$ מכיוון שבין כל שני מספרים בהצגה העשרונית יש אפס לא ייתכן שנקבל זנב אינסופי של 9 ז"א יש הצגה עשרונית יחידה ל $f(g_1),f(g_2)$ והספרה שבמקום ה $2i-1$ שונה עבור שני המספרים ולכן $f(g_1)\ne f(g_2)$.

<u>משפט</u>

$\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|\le\left|{z_2}^{\mathbb{N}}\right|$.

<u>הוכחה</u>

נגדיר פונקציה $f:\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
$a\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ היא הסדרה $a_1,a_2,a_3,a_4,...$ כאשר $a_i\in\mathbb{N}$ לכל $i\in\mathbb{N}$.
עבור הסדרה הנ"ל נגדיר סדרה: $\overbrace{1,1,...,1}^{a_1+1},0,\overbrace{1,1,...,1}^{a_2+1},0,\overbrace{1,1,...,1}^{a_3+1},...$.
נראה שהפונקציה חח"ע. נניח ש $a,b\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כך ש $a\ne b$ ז"א קיימת תת קבוצה $I\subseteq\mathbb{N}$ שונה מקבוצה ריקה כך שלכל $i\in I$ מתקיים $a_i\ne b_i$ מכיוון ש I תת קבוצה של הטבעיים קיים לה איבר קטן ביותר נסמנו ב j ז"א j הוא האיבר הקטן ביותר שעבורו מתקיים $a_j\ne b_j$. נניח ב.ה.ג.כ ש $a_j<b_j$.
במקום ה $\sum_{i=1}^{j}a_i+2n$ שווה לאפס בסדרה a ושווה לאחד בסדרה b.

<u>משפט</u>

אם $k_2>0$, $m_1\le m_2\wedge k_1\le k_2$, אז ${k_1}^{m_1}\le{k_2}^{m_2}$.

<u>הוכחה</u>

אם $m_1=0$ אז $1={k_1}^{m_1}\le{k_2}^{m_2}$(מכיוון ש $k_2>0$). נניח ש $m_1\ne 0$.
אם $k_1=0$ אז $0={k_1}^{m_1}\le{k_2}^{m_2}$. נניח ש $k_1,m_1\ne 0$.
קיימות קבוצות A,B,C,D כך ש $A\subseteq C$ ו $B\subseteq D$ $|A|=k_1,|C|=k_2,|B|=m_1,|D|=m_2$.
מכיוון ש $k_2>0$ נקבל ש $C\ne\phi$. יהי $c\in C$.
עבור $f\in A^B$ נתאים את הפונקציה $f'\in C^D$ באופן הבא: $f'(x)=\begin{cases} f(x) & x\in B\\ c & x\notin B\end{cases}$.

נוכיח שההתאמה היא חח"ע. נניח ש $f_1' \neq f_2'$ ז"א קיים $x \in D$ כך ש $f_1'(x) \neq f_2'(x)$ מכיוון שלכל $x \notin B$ $f_1'(x) = c \wedge f_2'(x) = c$ ולכן קיים $x \in B$ כך ש $f_1'(x) \neq f_2'(x)$ ז"א $f_1(x) \neq f_2(x)$ ולכן $f_1 \neq f_2$.

<u>מסקנה</u>

$\aleph = \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| = \left|2^{\mathbb{N}}\right| = \left|p(\mathbb{N})\right|$.

<u>הוכחה</u>

הראינו שלכל קבוצה A מתקיים $\left|P(A)\right| = \left|2^{A}\right|$ ובפרט $\left|p(\mathbb{N})\right| = \left|2^{\mathbb{N}}\right|$.

$\aleph = \left|10^{\mathbb{N}}\right| \leq \left|2^{\mathbb{N}}\right| \leq \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| \leq \left|10^{\mathbb{N}}\right| = \aleph$ וממשפט קנטור ברנשטיין נקבל את הדרוש.

<u>חיבור עוצמות</u>

<u>הגדרה</u>

תהיי A קבוצה שעוצמתה k_1, ותהיי B קבוצה כל ש $A \cap B = \phi$, שעוצמתה k_2. הסכום של שתי העוצמות יוגדר כך: $\left|A \cup B\right| = k_1 + k_2$. הפעולה תיקרא חיבור עוצמות.

<u>טענה</u>

הגדרת חיבור עוצמות מוגדרת היטב. ז"א אם $\left|A\right| = \left|C\right| \wedge \left|B\right| = \left|D\right|$.

<u>הוכחה</u>

$\left|A\right| = \left|C\right|$ ולכן קיימת פונקציה חח"ע ועל $f : A \to C$.

$\left|B\right| = \left|D\right|$ ולכן קיימת פונקציה חח"ע ועל $g : B \to D$.

נגדיר $h : A \cup B \to C \cup D$ $\quad h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$.

מכיוון ש $A \cap B = \phi$ הפונקציה מוגדרת היטב. מכיוון ש $C \cap D = \phi$ ו f, g חח"ע הפונקציה $h : A \cup B \to C \cup D$ חח"ע. מכיוון ש f, g על הפונקציה $h : A \cup B \to C \cup D$ על.

<u>משפט (הוכחה קלה יחסית ונשאיר כתרגיל בית)</u>

א. חיבור עוצמות הוא קומוטטיבי, ז"א $k_1 + k_2 = k_2 + k_1$.

ב. חיבור עוצמות הוא אסוציאטיבי, ז"א $(k_1 + k_2) + k_3 = k_1 + (k_2 + k_3)$.

<u>הגדרה</u>

יהיו k_1, k_2 עוצמות. $k_1 \cdot k_2 = \left|A \times B\right|$, כאשר A היא קבוצה שעוצמתה k_1, ו B היא קבוצה שעוצמתה k_2. הפעולה תיקרא כפל עוצמות.

<u>טענה</u>

כפל עוצמות מוגדר היטב. ז"א אם $\left|A\right| = \left|C\right| \wedge \left|B\right| = \left|D\right|$ אז $\left|A \times B\right| = \left|C \times D\right|$.

<u>הוכחה</u>

$\left|A\right| = \left|C\right|$ ולכן קיימת פונקציה חח"ע ועל $f : A \to C$.

$\left|B\right| = \left|D\right|$ ולכן קיימת פונקציה חח"ע ועל $g : B \to D$.

נגדיר פונקציה $h : A \times B \to C \times D$ ע"י $h(a,b) = \left(f(a), g(b)\right)$ מכיוון ש f, g חח"ע ועל גם h חח"ע ועל.

<u>משפט (הוכחה קלה יחסית ונשאיר כתרגיל בית)</u>

א. כפל עוצמות הוא קומוטטיבי, ז"א $k_1 \cdot k_2 = k_2 \cdot k_1$.

ב. חיבור עוצמות הוא אסוציאטיבי, ז"א $(k_1 \cdot k_2)\cdot k_3 = k_1 \cdot (k_2 \cdot k_3)$.

משפט

אם $k_1 \le k_2 \wedge m_1 \le m_2$ אז $k_1 \cdot m_1 \le k_2 \cdot m_2$.

הוכחה

קיימות קבוצות A,B,C,D כך ש $A \subseteq C$ ו $B \subseteq D$ $|A| = k_1, |C| = k_2, |B| = m_1, |D| = m_2$.

נגדיר פונקציה $h : A\times B \to C\times D$ ע"י $h(a,b) = (a,b)$ הפונקציה חח"ע ולכן $k_1 \cdot m_1 \le k_2 \cdot m_2$.

משפט

לכל k_1, k_2, k_3 מתקיים $k_1(k_2 + k_3) = k_1k_2 + k_1k_3$.

הוכחה

נובע ישירות מהשוויון $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

משפט

יהיו k_1, k_2, k_3 עוצמות.

א. $(k_1 \cdot k_2)^{k_3} = k_1^{k_3} \cdot k_2^{k_3}$.

ב. $k_1^{k_2+k_3} = k_1^{k_2} \cdot k_1^{k_3}$.

ג. $k_1^{k_2\cdot k_3} = (k_1^{k_2})^{k_3}$.

הוכחה

א. יהיו A_1, A_2, A_3 קבוצות כך ש $|A_1| = k_1, |A_2| = k_2, |A_3| = k_3$.

נגדיר פונקציה $g : (A_1\times A_2)^{A_3} \to A_1^{A_3} \times A_2^{A_3}$.

עבור $f \in (A_1\times A_2)^{A_3}$ ז"א $f : A_3 \to A_1 \times A_2$ פונקציה ז"א לכל $x \in A_3$ $f(x) = (x_1, x_2)$ כאשר $x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2$ נתאים (f_1, f_2) כאשר לכל $x \in A_3$ מתקיים $f_1(x) = x_1 \wedge f_2(x) = x_2$ ז"א $g(f) = (f_1, f_2)$.

הפונקציה חח"ע

נניח ש $h_1, h_2 \in (A_1\times A_2)^{A_3}$ כך ש $g(h_1) = g(h_2)$ ז"א

$(h_{11}, h_{12}) = (h_{21}, h_{22}) \Leftarrow h_{12} = h_{22} \wedge h_{11} = h_{21}$ ז"א לכל $x \in A_3$ מתקיים

$h_{12}(x) = h_{22}(x) = x_2 \wedge h_{11}(x) = h_{21}(x) = x_1$ ולכן לכל $x \in A_3$ מתקיים

$h_1(x) = (x_1, x_2) = h_2(x)$ כלומר $h_1 = h_2$ כדרוש.

הפונקציה על

נניח ש $h \in A_1^{A_3} \times A_2^{A_3}$ ז"א $h = (f_1, f_2)$ כאשר $f_1 : A_3 \to A_1 \wedge f_2 : A_3 \to A_2$. נגדיר פונקציה $f : A_3 \to A_1 \times A_2$ כל שלכל $x \in A_3$ $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ ואז $g(f) = h$.

ניתן להוכיח את הסעיפים ב+ג באופן דומה. נשאיר לתרגיל בית

דוגמה לשימוש

$\aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$.