

### אלגברה מופשטת 3 – תרגיל 7

1. יהי  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  פולינום אי-פריק, ויהי  $E/\mathbb{Q}$  שדה הפיצול שלו. נניח שחבורת גלואה  $Gal(E/\mathbb{Q})$  היא אבלית. הראו ש  $E = \mathbb{Q}[a]$  לכל שורש  $a \in E$  של  $f(x)$ . (רמז: התבוננו ב  $Gal(E/\mathbb{Q}[a])$ ).
2. יהי  $F/\mathbb{Q}$  שדה הפיצול של פולינום אי-פריק  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ . הראו שאם  $[F:\mathbb{Q}]$  אי-זוגי אזי ל  $f(x)$  יש רק שורשים ממשיים.
3. פרקו את  $x^{10} - 1$  לגורמים אי-פריקים, ומצאו מהפירוק את  $\Phi_{10}$  הפולינום הציקלוטומי (שהוא הפולינום המינימלי של  $\rho_{10} = cis \frac{2\pi}{10}$ ). מצאו את חבורת גלואה של שדה הפיצול של  $\Phi_{10}$ .
4. מצאו את הגורמים האי-פריקים של הפולינום  $x^8 - x$  והסיקו שיש רק 2 פולינומים אי-פריקים מדרגה 3 מעל  $\mathbb{Z}_2$ .
5. הראו שאם בשדה סופי ממאפיין  $p > 0$  האיבר  $a \in E$  הוא יוצר של  $E^*$ , אזי  $\langle \sigma(a) \rangle = E^*$  לכל  $\sigma \in Gal(E/\mathbb{Z}_p)$ .
6. מצאו את חבורת גלואה של שדה הפיצול של  $x^3 - 2$  מעל  $\mathbb{Z}_{11}$  ומעל  $\mathbb{Z}_7$ .