

בס"ד

אוניברסיטת בר-אילן
מבחן בקורס: אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)
מספרי הקורס: 8821107 8821105
המרצים: דבורה קפלן ומיכאל מגרל
מתרגלים: לואי פולב ומיכאל פרידמן
תאריך: 11.11.10 מועד ב'
חומר עזר: רק מחשבון רגיל
משך המבחן: שעתיים

לפתור בדיוק 5 מתוך 6 שאלות
כל סעיף שווה ל 7 נקודות

השאלות:

1. א. בקטע סגור $X := [2, 5]$ נגדיר פעולה הבאה $a \bullet b := \min\{a, b\}$.
הוכיחו ש (X, \bullet) מונויד קומוטטיבי. מה הם ההפיכים במונויד (X, \bullet) ?
ב. בדקו: האם קיים פתרון למשוואה $\overline{5 \cdot x} = \overline{132}$ במונויד (\cdot, \mathbb{Z}_{65}) .
ג. הוכיחו או הפריכו: כל מונויד קומוטטיבי בעל תכונת הצמצום הוא חבורה.

2. א. מצאו תמונות אפימורפיות של $U_{10} \times \Omega_3$.
ב. עבור החבורה G תארו: היוצרים, אוטומורפיזמים ותת חבורות כאשר

$$a = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2010} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G := \langle a \rangle \leq GL_2(\mathbb{R})$$

- ג. הוכח או הפרך: קיים אפימורפיזם $D_5 \times S_3 \rightarrow D_5$.

3. א. הוכח שלא קיים איזומורפיזם $f: * \rightarrow *$.
ב. מצאו מונומורפיזם $\Omega_{2010} \rightarrow /$.
ג. מצאו אוטומורפיזם לא פנימי עבור חבורת Euler U_{12} .
תזכורת: אוטומורפיזם פנימי בחבורה G הוא מהטיפוס
 $f: G \rightarrow G, f(x) = gxg^{-1}$.

4. א. הוכיחו את משפט Euler על החזקות ומצאו 2 ספרות אחרונות של המספר 1959^{3002} .
- ב. הוכיחו שכל חבורה מסדר p^2 אבלית כאשר p ראשוני.
- ג. ידוע ש G חבורה עם p^2 אלמנטים כאשר p ראשוני. הוכיחו או הפריכו: תמיד מתקיים $|Aut(G)| \geq p^2 - 2p + 2$.
5. א. תנו דוגמה של פעולה של חבורה אינסופית עם 3 מסלולים לא טריוויאליים.
- ב. הוכיחו או הפריכו: מספר מחלקות צמידות בחבורה S_6 גדול ממספר חבורות אבליות לא ציקליות עם 3600 איברים.
- ג. כמה לוחות 3×3 לא שקולים קיימים לגבי הסיבובים אם מותר לצבוע את הלוחות ב 5 צבעים נתונים.
6. א. הוכיחו את משפט Sylow הראשון (קיום תת חבורות Sylow).
- ב. הוכיחו שכל חבורה בעלת 132 אלמנטים היא לא פשוטה.
- ג. תהי G חבורה מסדר 297. הוכיחו שקיימת תת חבורה H של G כך שהמרכז של חבורת מנה G/H הוא לא טריוויאלי.

☺ **בהצלחה!**