תרגול כיתה 10 בפיסיקה קלאסית 1

נושאים: אוסצילטור הרמוני פשוט, אוסצילטור הרמוני מרוסן.

תזכורת לחומר התאורטי
אוסצילטור הרמוני פשוט
תנועה הרמונית פשוטה מתארת תנודות רבות בטבע כמו למשל תנודות של אטומים במולקולה או תנודת מטוטלת בשעון. גוף הנע בתנועה זו נקרא אוסצילטור (מתנד) הרמוני.
משוואת התנועה של אוסצילטור הרמוני פשוט ב-1D היא

$$m\ddot{x} = -kx$$

כאשר m היא מסת הגוף, x הוא הסטייה ממצב שיווי המשקל ו- $F = -kx$ הוא הכוח המחזיר.
פתרון משוואת התנועה הוא

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$$

כאשר $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ היא התדירות הזוויתית. A ו- α נקבעים מתנאי התחלה. A הוא אמפליטודת התנודה. $\omega t + \alpha$ היא הפאזה. α היא הפאזה ההתחלתית. זמן המחזור והתדירות ניתנים ע"י

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad f = \upsilon = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

מהירות הגוף ניתנת ע"י גזירה לפי הזמן של העתקו.

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega A\sin(\omega t + \alpha)$$

תאוצת הגוף מתקבלת ע"י גזירה לפי הזמן של מהירותו.

$$a(t) = \dot{v}(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x(t)$$

האנרגיה הקינטית של הגוף היא

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \alpha) = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$$

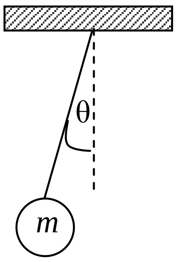
האנרגיה הפוטנציאלית של הכוח המחזיר היא

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \alpha) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

האנרגיה הכוללת היא

$$E_{tot} = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

האנרגיה הכוללת נשמרת מאחר והכוח שפועל הוא כוח משמר.



גוף נקודתי התלוי מחוט באורך l ומתנדנד בזוויות קטנות ($\theta < 15^\circ$) נקרא מטוטלת מתמטית. משוואת התנועה לגוף היא

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

מכיוון שהזוויות קטנות, ניתן לקרב $\sin\theta \approx \theta$ ומקבלים משוואה של תה"פ:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \; T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

נסתכל על גוף הנתון בפוטנציאל כלשהו $E_p(x)$ ומתנודד סביב מינימום בפוטנציאל במיקום x_0.
אוסצילטור כזה נקרא אוסצילטור אנהרמוני. אם התנודות קטנות, ניתן לקרב את הפוטנציאל ע"י

$$E_p(x) \approx \frac{1}{2}k(x-x_0)^2$$

$$k = \left.\frac{d^2E_p(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}$$

תנועתו של גוף תהיה בקירוב הרמונית ונתונה ע"י

$$x(t) = x_0 + A\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

<u>אוסצילטור הרמוני מרוסן</u>

כעת נניח כי פועל כוח ריסון המתכונתי למהירות הגוף שפועל בכיוון הפוך לה. משוואת התנועה היא

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x}$$

ניתן לכתוב את המשוואה בתור

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$$

$$\gamma = \frac{\lambda}{2m}, \quad {\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$$

פתרון המשוואה מתחלק ל-3 מקרים: ריסון חלש שבו $\gamma < \omega_0$, ריסון קריטי שבו $\gamma = \omega_0$ וריסון חזק שבו $\gamma > \omega_0$. הפתרון במקרה של ריסון חלש הוא

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t + \alpha)$$

$$\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}$$

הפתרון במקרה של ריסון קריטי הוא

$$x(t) = (Ct + D)e^{-\gamma t}$$

C ו-D הם קבועי אינטגרציה. הפתרון במקרה של ריסון חזק הוא

$$x(t) = e^{-\gamma t}(C_1e^{\alpha t} + C_2e^{-\alpha t})$$

$$\alpha = \sqrt{\gamma^2 - {\omega_0}^2}$$

C_1 ו- C_2 הם קבועי אינטגרציה. גורם האיכות, Q, מוגדר ע"י

$$Q = \frac{\omega m}{\lambda} = \frac{\omega}{2\gamma}$$

Q שווה למספר הרדיאנים שהפאזה עוברת בזמן שהאנרגיה הכוללת של הגוף קטנה פי e במקרה של ריסון חלש.