מבני נתונים ואלגוריתמים - תרגול 11

8 בינואר 2012

משפט

ברשת זרימה $G = (V, E, c)$ מתקיים שהזרימה המקסימלית שווה למשקל החתך המינימלי.

הגדרה

רשת זרימה שלמה היא רשת זרימה בה כל הקיבולות הן מספרים שלמים
זרימה שלמה היא זרימה f בה מתקיים $f_{u,v} \in \mathbb{Z}$ לכל $u, v \in V$.
ברשת זרימה שלמה תמיד קיימת זרימה מקסימלית שלמה.

תרגיל

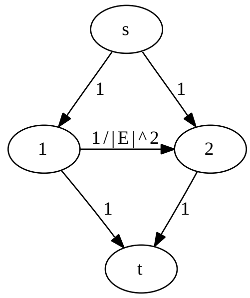
הוכיחו או הפריכו:

1. ברשת זרימה שלמה שכל אחד מקיבוליה קטן מ-7, אלגוריתם Ford Fulkerson עושה $O(|E|)$ איטרציות.
2. כנ"ל ברזת זרימה לא שלמה בה כל אחד מהקיבולים קטן מ-7.

פתרון

1. נכון.
הוכחה:
$G = (V, E, c)$, $s, t \in V$.
לכל חתך $S - T$ מתקיים שמשקל החתך הוא לכל היותר $7|E| = \sum_{(u,v)\in E} 7 \geq \sum_{(u,v)\in E} c_{u,v}$.
כל איטרציה של FF חייבת לשפר את הזרימה לפחות ב1, כי הרשת שלמה ולכן, מספר השיפורים האפשרי הוא לכל היותר $7|E|$ ולכן אלגוריתם FF עושה $O(|E|)$ איטרציות.

2. לא נכון.
הפרכה:



משפרים לסירוגין עם המסלולים:
$s \to 1 \to 2 \to t$
$s \to 2 \to 1 \to t$
האלגוריתם יסתיים אחרי $2|E|^2$ איטרציות כי הזרימה משפרת כל פעם ב$\frac{1}{|E|^2}$ והזרימה המקסימלית היא 2.

תרגיל

נתונה רשת זרימה $G = (V, E, c)$ וקבוצת מקורות $S = \{s_1, ..., s_k\}$ וקבוצת מטרות $T = \{t_1, ..., t_n\}$.
כיצד תמצאו זרימה מקסימלית כאשר מותר להזרים מכל אחד מהמקורות (יותר מאחד) ומותר להגיע לכל אחד מהיעדים.
פורמלית, הזרימה $f_{u,v}$ צריכה לקיים:

1.
$$f_{u,v} \leq c_{u,v}$$

2.
$$f_{u,v} = -f_{v,u}$$

3.
$$\sum_v f_{u,v} = 0$$

לכל u למעט $u \in S \cup T$.

פתרון

נוסיף "מקור על" s_0 עם הקשתות $s_0 \to s$ לכל $s \in S$ שמשקלן ∞, ו"מטרת על" t_0 עם הקשתות $t \to t_0$ לכל $t \in T$ שמשקלן ∞.
נקרא לרשת החדשה G_0. נמצא זרימה מקס' בG_0 מs_0 לt_0 ואז נסיר את t_0 וs_0 מG_0 ונקבל את הזרימה המקסימלית הדרושה בG.

תרגיל

נתונה רשת זרימה $G = (E, V, c)$ ונניח שגם לכל קדקד $v \in V$ יש קיבולת c_v.
כיצד תמצאו זרימה מקס' $f_{u,v}$ בG המקיימת:

$$\sum_{(u,v) \in E} f_{u,v} \leq c_v$$

לכל u.

פתרון

נגדיר גרף חדש G באופן הבא:

$$\begin{aligned} V' &= V_0 \cup V_1 \\ V_i &= \{v_i \mid v \in V\}, \, i = 0, 1 \end{aligned}$$

לכל $v \in V$ תהיה קשת $v_0 \to v_1$ עם $c_{v_0, v_1} = v_v$
לכל $(u, v) \in E$ נשים קשת $u_1 \to v_0$ עם $c_{u_1, v_0} = c_{u,v}$.
קיבלנו רשת זרימה חדשה G'. נמצא זרימה מקסימלית בG' וזו הזרימה המקסימלית בG המקיימת את התנאי.
הסבר:
יש התאמה חח"ע ועל בין זרימות בG' לבין זרימה בG המקיימות את התנאי:

$$\begin{aligned} f_{u,v} \mapsto f'_{u',v'} &= \begin{cases} f_{u,v} & (u, v) = (u_1, v_0) \\ \sum_u f_{u,v} & (u, v) = (v_0, v_1) \\ 0 & else \end{cases} \\ f'_{u',v'} \mapsto f_{u,v} &= f_{u_1, v_0} \end{aligned}$$

תרגיל

נאמר ששני מסלולים בגרף G הם זרים בקשתות אם אין להם קשת משותפת. נאמר שהם זרים בקדקדים אם אין להם קדקד משותף.
כיצד בהינתן גרף $G=(V,E)$ תמצאו את:

1. מס' המסלולים המקס' מs לt כך שכל שניים מביניהם זרים בקשתות.
2. כנ"ל עם זרים בקדקדים.

פתרון

1. נהפוך את G לרשת זרימה ע"י $c_{u,v}=\begin{cases}1 & (u,v)\in E\\ 0 & else\end{cases}$
נמצא זרימה מקסימלית ב(V,E,c). טוענים שזה מס' המסלולים המקס' מs לt שזרים בקשתות בזוגות.
נניח שX קב' מסלולים מs לt זרים בקשתות בזוגות מקסימלית בגודלה.
נגדיר זרימה $f_{u,v}$ על X ע"י:

$$f_{u,v}=\begin{cases}1 & (u,v)\in A\in X\\ 0 & else\end{cases}$$

זו זרימה חוקית: יהי $s,t\neq v\in V$. עוברים בv m מסלולים בX. בכל אחד מהסלולים האלה, v אינו ההתחלה ואינו הסיום. לכן, אל v נכנסות m קשתות ממסלולים בX ויוצאות ממנו m קשתות, כי המסלולים זרים בקשתות, וזה אומר שהזרימה חוקית.
נבחר את החתך $S=\{s\}$ ו$T=V\setminus\{s\}$. הקשתות מS לT הן בדיוק הקשתות היוצאות מs. כל מסלול בX מכיל בדיוק אחת מהקשתות האלה. כל קשת (s,u) מוכלת בדיוק במסלול אחד בX אמ"ם $f_{s,u}=1$.
לכן, $\sum f_{s,u}=|X|$.
לכן, לכל קב' מקסימלית של מסלולים.. מתקיים $|f_{max}|\leq|X|$.
כדי להוכיח $|f_{max}|\leq\max|X|$ נשים לב שבאלגוריתם FF מוציאים בדיוק מסלול אחד מהגרף מs לt והמשקל שלו הוא 1 (כי $c_{u,v}\in\{0,1\}$), לכן קיימת קב' מסלולים זרים בקשתות מs לt בגודל = מס' האיטרציות של FF = הזרימה המקסימלית, לכן קיימת X כך ש$|X|\geq f_{max}$, וסיימנו.

2. כמו 1, רק עם קיבול על הקדקדים, ונפתור כמו בתרגיל קודם (נפצל כל קדקד ל2 וכו').

התאמת מחרוזות

נתונות שתי מחרוזות, T ו-P. מחפשים עותקים רצופים של P בתוך T.

סימונים

$T[n:m]$ = המקומות ה-n עד $m-1$ בT.
$T_n=T[0:n]$.
עבור מחרוזות X,Y אומרים ש:
X רישא של Y אם $\exists Z$ כך ש$XZ=Y$.
X סיפא של Y אם $\exists Z$ כך ש$ZX=Y$.
הגדרת בעיית החיפוש מחדש:
רוצים את כל הm-ים כך ש-P סיפא של T_m.

אלגוריתם חיפוש נאיבי

מחזיקים - i אינדקס בT וq אינדקס בP.
כל עוד $T[i]=P[q]$ (+תנאי קצה), $i++$ ו$q++$.
אחרת - $i=i-q+1$ ואז $q=0$.

אלגוריתם KMP

דבר דומה, רק שבכישלון במקום $i=i-q+1$ ו$q=0$, נשאיר את i באותו המקום ונזיז את q בהתאם למה שצריך.
האלגוריתם משתמש בטבלה בגודל $|P|$. נסמן את הטבלה בC.

$C[i]$ = המקס' של $0 \le j < i-1$ כך שP_{j+1} סיפא של P_{i+1} או -1 אם אין סיפא כזו.
מגדירים $C[0] = -1$.
לדוגמה:

$$P = aaabaaabaab$$

אזי:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$C[i]$	-1	0	1	-1	0	1	2	3	4	5	-1
הסיפא	P_0	P_1	P_2	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_0

האלגוריתם ללא בדיקות קצה:
קלט - T באורך n וP באורך m.
מחזיקים שני אינדקסים - i אינדקס בT וj אינדקס בP.
כל עוד $T[i] = P[q]$ אז $i++, q++$. (צריך לבדוק תנאי קצה)
אם $T[i] \neq P[q]$:
אם $C[q] \neq -1$ אז $q = C[q]$.
אחרת, $q = 0$, $i += 1$.
(האלגוריתם קצת לא נכון בגלל הסטות של ± 1, פסאודו קוד נכון אפשר לראות בהרצאה 18 של לוזון או בהמשך באתר).