תרגיל 3: משוואות מסדר שני

משוואות לינאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים

פתרו את המשוואות הדיפרנציאליות הבאות:

1. $y''-y'-2y=0$
2. $\ddot{x}-8\dot{x}+16x=0$
3. $y''-2y'+10y=0$

משוואות לינאריות אי-הומוגניות עם מקדמים קבועים

פתרו את המשוואות הדיפרנציאליות הבאות בשתי שיטות:

- אינטגרציה רצופה למציאת הפתרון הכללי
- מציאת הפתרון ההומוגני ומציאת פתרון פרטי כלשהו בשיטת הניחוש המושכל.

4. $(D^2+D-2)y=2(1+x-x^2)$
5. $(D^2-1)y=e^x\sin 2x$

משוואה ללא y

פתרו את המשוואה הבאה:

6. $xy''+y'=4x$

משוואה ללא x

פתרו את המשוואה הבאה:

7. $yy''+(y')^2+4=0$

משוואה ללא x מיוחדת

8. פתרו את המשוואה הבאה $y''+\omega^2 y=0$ פעמיים:

- בעזרת השיטה שנלמדה בשיעור עבור משוואות מהצורה $y''+f(y)=0$.

תזכורת:

נתונה המשוואה: $$y''+f(y)=0$$

נכפיל ב- y': $$y'y''+f(y)\frac{dy}{dx}=0$$

מכיוון ש: $y''=\frac{dy'}{dx}$ נכתוב: $y'\frac{dy'}{dx}+f(y)\frac{dy}{dx}=0$

ניתן לראות כי ביצוע אינטגרל על המשוואה לפי x נותן:

$$\frac{1}{2}(y')^2+\int f(y)dy=Const.$$ (בדיקה ע"י גזירה לפי x).

- בעזרת השיטה לפתרון מד"ר לינארית והומוגנית עם מקדמים קבועים.

הראו כי התוצאה הראשונה יכולה להתקבל מהשניה.

<u>משוואת אוילר</u>

פתרו את המשוואות הבאות:

9. $x^2y''+3xy'-3y=0$

10. $x^2y''+5xy'+4y=0$

11. $x^2y''-xy'+6y=1$

<u>משוואות שונות</u>

פתרו את המשוואות הבאות:

12. $e^{2x}\frac{d^2y}{dx^2}=4(e^{4x}+1)$

13. $(D^2+1)y=-2\sin x+4x\cos x$

14. $3x^2y''+4xy'-2y=6x^2$

15. $(D^2-9)y=x+e^{2x}-\sin 2x$

<u>בעיות</u>

נסחו משוואה דיפרנציאלית מתאימה עבור כל בעיה ופתרו אותה. השתמשו בנתונים הנוספים כדי למצוא את קבועי האינטגרציה.

16. העקמומיות של עקומה במישור (x,y) היא: $K=\frac{y''}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}$.

עבור המקרה בו K קבוע, פתרו את המשוואה הדיפרנציאלית כדי להראות שעקומות עם עקמומיות קבועה הנן מעגלים (או קווים ישרים).

17. כח המשיכה הכבידתי הפועל על מסה m הנמצאת במרחק r ממרכז כדוה"א (r גדול מ- R , רדיוס כדוה"א) הנו mgR^2/r^2.

- כתבו את המשוואה הדיפרנציאלית המייצגת את תנועת מסה m הנזרקת בכיוון הרדיאלי החוצה משטח פני כדוה"א.
- בהנחה שהמהירות ההתחלתית של המסה היא $v(r=R)=v_0$, מצאו את $v(r)$.
- מצאו את r המקסימלי עבור ערך נתון של v_0.
- מצאו את מהירות הבריחה, כלומר את הערך המינימלי של v_0 עבורו r יכול ללכת לאינסוף.

18. מסה m נופלת תחת השפעת כח הכבידה (הכח שווה ל- mg) דרך נוזל בעל צמיגות הגורמת לכח חיכוך הנתון בנוסחא $-2mv/(1+t)$, כאשר v זו המהירות של m. בהנחה שהמסה היתה בהתחלה במנוחה, מצאו את מהירותה, תאוצתה והמרחק אותו נפלה (במונחי g) כאשר $t=1$.

19. פתור את הבעיה של אוסילטור הרמוני מרוסן ומאולץ ע"י כח מחזורי, ובפרט:

- משוואת התנועה של האוסילטור הנה $\frac{d^2y}{dt^2}+2b\frac{dy}{dt}+\omega^2 y=F\sin(\Omega t)$ כאשר:

  $\omega^2=\frac{k}{m}$, $2b=\frac{l}{m}$, k-קבוע הקפיץ, m - מסת האוסילטור; $l>0$ - קבוע הפרופורציה של כוח החיכוך, Ω - תדירות הכח המאלץ, F - קבוע. הראו כיצד מקבלים את המשוואה מחוק ניוטון.
- המשוואה הנה אי-הומוגנית. ראשית, פתרו את המשוואה ההומוגנית התואמת. בעשותכם זאת, הפרידו לשלושה מקרים:
  i. $b^2>\omega^2$ - ריסון חזק
  ii. $b^2=\omega^2$ - ריסון קריטי
  iii. $b^2<\omega^2$ - ריסון חלש

ציירו כל פתרון על גרף נפרד. מה המשותף לשלושת הפתרונות הללו כאשר $t \to \infty$? חלק זה של הפתרון נקרא טרנזיינט (transient), כלומר חולף.

- שנית, מצאו פתרון פרטי בעזרת שיטת הניחוש המושכל, ושימוש באקספוננט מרוכב. אתם אמורים לקבל את הביטוי הבא:

$$y_p = \frac{F}{\sqrt{\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+4b^2\Omega^2}}\sin\left(\Omega t-\phi\right)$$ כאשר $$\phi = \arctan\left(\frac{2b\Omega}{\omega^2-\Omega^2}\right).$$

מה קורה לפתרון זה כאשר $t \to \infty$? חלק זה של הפתרון נקרא המצב היציב (steady state), כלומר באופן מעשי זה החלק של הפתרון שישרוד לאורך זמן, והפתרון ההומוגני ידעך מהר מאוד ויהיה זניח.

שימו לב שלפי פתרון זה תדירות התנודה של האוסילטור שווה לזו של הכח המאלץ, אבל יש הפרש פאזה ביניהם.

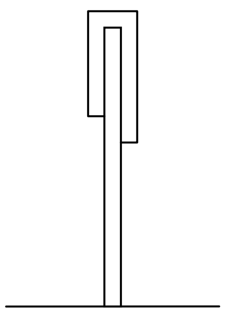
- תהודה (resonance):

בהנחה שתדירות הכח המאלץ Ω נתונה, מה צריכה להיות התדירות העצמית ω כדי שמשרעת התנודות של הפתרון הרשום בסעיף הקודם תהיה מקסימלית (זה מה שחשוב למאזיני רדיו)?

בהנחה שהתדירות העצמית ω נתונה, מה צריכה להיות תדירות הכח המאלץ Ω כדי שמשרעת התנודות תהיה מקסימלית (זה מה שמפחיד מהנדסי גשרים)?

20. שרשרת גמישה בעלת אורך l מונחת על יתד כך שקצה אחד שלה מעט ארוך יותר מהשני. בהנחה שהשרשרת מחליקה ללא חיכוך, כתבו ופתרו את משוואת התנועה והראו כי

$y = y_0 \cosh\left(t\sqrt{\frac{2g}{l}}\right)$, $0 < y < \frac{l}{2}$, כאשר $2y$ הוא ההפרש באורך של שני הקצוות, וכן $y(t=0) = y_0$.



בהצלחה!