מבנים דיסקרטיים – תרגיל 5

להגשה: 21.5.2013

1. $GL_2(R)$ היא חבורת המטריצות ההפיכות מגודל 2x2 עם מקדמים ממשיים. תהי פונקצייה $\phi : GL_2(R) \to GL_2(R)$ המקיימת $\phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$. האם ϕ היא איזומורפיזם?

2. תהי $G = \{1, -1, i, j, ij, -i, -j, -ij\}$ חבורה עם פעולת כפל המוגדרת $i^2 = j^2 = -1$ ו $ji = -ij$. מצאו תת-חבורה H כך ש $[G:H] = 4$.

3. כזכור איזומורפיזם של חבורות $f : G \to H$ שומר פעולה, חח"ע ועל. הוכיחו:
   a. שהוא גם מעביר יחידה ליחידה (כלומר: $f(e_G) = e_H$).
   b. שהוא גם מעביר הופכי להופכי (כלומר: $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$).
   c. שהוא גם מעביר חזקה לחזקה (כלומר: $f(a^n) = (f(a))^n$).
   d. שסדר איבר בתחום הוא כסדר תמונתו בטווח(כלומר: $\begin{matrix} a^m = e_G \Leftrightarrow (f(a))^m = e_H \\ a^{m-1} \neq e_G \Leftrightarrow (f(a))^{m-1} \neq e_H \end{matrix}$).

4. הראה כי $U(\mathbb{Z}_5) \cong (\mathbb{Z}_4, +)$ (ראו תרגיל 3 להגדרת $U(\mathbb{Z}_n)$) ע"י בניית איזומורפיזם ביניהן.

5. תהי G חבורה סופית ויהי $a \in G$ מסדר n, ונניח ש n=mk כאשר m,k שלמים חיוביים. הראו ש a^m הוא מסדר k.

6. א. האם $(\mathbb{R}, +, 0)$ איזומורפי ל $(\mathbb{Q}, +, 0)$?
   ב. האם $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ איזומורפי ל $(\mathbb{R}, +, 0)$?
   ג. האם $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ איזומורפי ל $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot, 0)$?