תרגיל 3

1. נתונה מערכת משוואות מעל שדה הממשיים.

$$\begin{cases} x_1+(a-1)x_2-x_3=4 \\ ax_1+(a-1)x_2-x_3=a+3 \\ x_1+(a-1)x_2+(a-3)x_3=7 \end{cases}.$$

א. לאילו ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד?

ב. לאילו ערכים של a אין פתרון למערכת?

ג. לאילו ערכים של a יש למערכת אינסוף פתרונות? במקרה זה מצא גם את הפתרון הכללי.

2. נתונה מערכת משוואות ליניארית הומוגנית של m משוואות ו n נעלמים.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+\dots+a_{2n}x_n=0 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

א. הוכיחו שאם $c=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ הוא פתרון של המערכת, אזי לכל סקלר λ גם λc הוא פתרון.

ב. הוכיחו כי אם $c=(\gamma_1,\dots,\gamma_n),d=(\delta_1,\dots,\delta_n)$ הם פתרונות של המערכת, אזי גם $c+d$ הוא פתרון של המערכת.

ג. הסיקו משני הסעיפים הקודמים כי אם $c=(\gamma_1,\dots,\gamma_n),d=(\delta_1,\dots,\delta_n)$ הם פתרונות של המערכת ו λ_1,λ_2 הם סקלרים כלשהם, אזי גם $\lambda_1c+\lambda_2d$ הוא פתרון של המערכת.

ד. הוכיחו או הפריכו: תכונות א,ב,ג מתקיימות גם עבור מערכת משוואות ליניארית לא הומוגנית.

3. חשב את המכפלות הבאות או הסבר מדוע אינן מוגדרות:

א. $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&0\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix}1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$

4. א. הכפילו את המטריצות הבאות בשני הסדרים EF ו FE:

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&0&1\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&c&1\end{pmatrix}.$$

האם $EF=FE$?

ב. עבור A,B הבאים, חישבו את A^2,A^3,B^2,B^3 והעריכו מה תהיה התוצאה ל A^5,A^n,B^5,B^n:

$$A=\begin{pmatrix}2&2\\0&0\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}.$$

5.

מי מבין המטריצות הבאות היא מטריצה אלמנטרית ? נמקו בקצרה

א. $\begin{bmatrix}1&0\\-5&1\end{bmatrix}$ ב. $\begin{bmatrix}-5&1\\1&0\end{bmatrix}$ ג. $\begin{bmatrix}1&0\\0&\sqrt{3}\end{bmatrix}$ ד. $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ ה. $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ ו. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&9\\0&0&1\end{bmatrix}$

.6 יהיו $B=\begin{pmatrix}1&2\\5&5\\3&4\end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$. חשב את B^t, A^t, AB, ואת B^tA^t,

.7 א) הוכח שלכל מטריצה $A\in F^{n\times n}$ המטריצה AA^t-A^tA סימטרית.

ב) הוכח שלכל מטריצה $A\in F^{n\times n}$ המטריצה $A-A^t$ אנטי סימטרית.

ג) הוכח שכל מטריצה $A\in F^{n\times n}$ ניתן לרשום כסכום מטריצה סימטרית ומטריצה אנטי סימטרית

.8 הפוך את המטריצה הבאה בשיטת גאוס-ז'ורדן:

$$\begin{pmatrix}2&1&1&2\\1&2&1&2\\1&1&2&2\\2&2&1&1\end{pmatrix}$$

.9 יהיו $A,B\in F^{n\times n}$ כך ש A הפיכה. הוכח או הפרך :

a. למערכות $Ax=0, ABx=0$ אותם פתרונות.

b. למערכות $A^{-1}x=0, BAx=0$ אותם פתרונות.

c. לכל וקטור $b\neq 0$, ל $ABx=b, BAx=b$ אותם פתרונות.

.10 הוכח או הפרך :

a. אם $A^2=0$ אזי $A=0$.

b. אם $A^2=I$, אזי $A=I$.

.11 הוכח : A הפיכה אמ"ם קיים K כך ש A^k הפיכה.