

תרגיל 7 - אנליזה למורים

11 בינואר 2017

שאלה 1

חשב את הגבול הבא: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+3x}-3\sqrt{2}}{x^2-7x+12}$

הדרכה: למרות שזו פונקציה אלמנטרית והכל אבל היא לא מוגדרת בנקודה $x = 3$, כי

המכנה מתאפס שלה מתאפס בנקודה $x = 3$.

כדי לפתור את השאלה, נכפיל ונחלק בצמוד של המונה ואז במונה נקבל $x^2 + 3x - 18$

שהוא גם מתאפס בנקודה $x = 3$, ולאחר מכן תעשו פירוק לגורמים לינארים של הפולינום

במונה וגם במכנה, צמצמו את $(x - 3)$ במונה וגם במכנה ותקבלו פונקציה אלמנטרית אשר

מוגדרת בנקודה $x = 3$ וחשבו את גבולה.

פתרון:

נכפיל ונחלק בצמוד של המונה:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+3x}-3\sqrt{2}}{x^2-7x+12} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3x}+3\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3x}+3\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+3x-18}{(x^2-7x+12)(\sqrt{x^2+3x}+3\sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+6)(x-3)}{(x-4)(x-3)} = -\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

שאלה 2

חשבו את גבול הבא: $\lim_{x \rightarrow -9} \frac{x^2+2x-63}{x^2+25x+144}$

פתרון:

$$\lim_{x \rightarrow -9} \frac{x^2+2x-63}{x^2+25x+144} = \lim_{x \rightarrow -9} \frac{(x-7)(x+9)}{(x+16)(x+9)} = -\frac{16}{7}$$

הדרכה:

שימו לב שגם המונה וגם המכנה מתאפסים בנקודה $x = -9$, ולכן פרקו את המונה

לגורמים לינארים, צמצמו את $(x + 9)$ וחשבו את הגבול.

שאלה 3

$$\lim_{x \rightarrow 6} 6 \left(\frac{x}{6} \right)^{\frac{x^2-15x+56}{x-6}}$$

רמז:

השתמשו בנוסחה מהתרגול: אם $f(x) \rightarrow 1$ כאשר $x \rightarrow a$ אזי $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} (f(x)-1)g(x)}$.

פתרון:

$$\lim_{x \rightarrow 6} 6 \left(\frac{x}{6} \right)^{\frac{x^2-15x+56}{x-6}} = e^{\lim_{x \rightarrow 6} \left(6 \left(\frac{x}{6} - 1 \right) \frac{x^2-15x+56}{x-6} \right)} = e^{\frac{1}{3}}$$

שאלה 4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(2x)}{x} \text{ חשבו את הגבול:}$$

הדרכה:

דרך א': השתמשו בגבולות ידועים שראינו בתרגול

דרך ב': הכפילו ותחלקו בצמוד של המונה (מה הוא הצמוד של המונה?), לאחר מכן

השתמשו בזהות טריגונומטרית הבאה: $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, ולבסוף השתמשו בגבולות

ידועים.

פתרון:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(2x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(2x)}{x} \cdot \frac{1+\cos(2x)}{1+\cos(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2(2x)}{x(1+\cos(2x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{x(1+\cos(2x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{2x^2} \cdot \frac{2x}{1+\cos(2x)} = 0 \end{aligned}$$

שאלה 5

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{x-\pi} \text{ חשבו את הגבול הבא:}$$

רמז: תעשו הצבה $t = \pi - x$ והשתמשו בגבולות ידועים.

פתרון:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{x-\pi} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi-t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{-t} = -1 \end{aligned}$$