

## תרגיל 3 – מבוא לאנליזה 1

1. הוכיחו בעזרת הגדרת הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 3n^2) = -\infty \quad (\text{א})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{3 + \sin(\sqrt{n} + 1)} = \infty \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2 + 3}{2n + 5}} = \infty \quad (\text{ג})$$

2. חשבו את הגבולות הבאים בעזרת אריתמטיקה של גבולות:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{6n^3 - 5n + 7}{3n^3 + n^2 + 1} \right)^4 \quad (\text{א})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!} \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+5} - \sqrt{n}) \quad (\text{ג})$$

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{ מתקיים } |q| < 1 \text{ (ניתן להיעזר בכך שעבור } |q| < 1 \text{ מתקיים } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{)} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{6 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^{n-1}} \quad (\text{ד})$$

3. תהי  $\{a_n\}$  סדרה חיובית המקיימת  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \mathbb{R}$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 + 3a_n}{4a_n + 1} = 1$ . מהו  $L$ ? נמקו.

4. תזכורת: אם  $\{a_n\}$  סדרה חיובית המקיימת  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ , אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ . השתמשו בעובדה זו כדי לחשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + \sqrt[3]{n}} \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \quad (\text{ג})$$

5. חשבו את הגבולות הבאים בעזרת כלל הסנדוויץ':

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \sin(n)}{n + \cos(2n)} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \quad (\text{ב}), \text{ כאשר } 0 < a < b < c \text{ ממשיים}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} \quad (\text{ג})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot \cos(4n)}{(2n)!} \quad (\text{ד}) \quad (\text{רמז: השתמשו בסעיף הקודם})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right) \quad (\text{ה})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}) \quad (\text{ו}) \quad (\text{הדרכה: } \sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n} = \sqrt[4]{n} \cdot (\sqrt[4]{1 + \frac{1}{n}} - 1) \text{ ומתקיים } \sqrt[4]{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n})$$