תרגיל בית 9 – מופשטת 1

<u>שאלה 1</u>

נניח ש- $Z(G)=\{1_G\}$. הוכיחו שהמרכז $C_{Aut(G)}(Inn(G))=\{Id_G\}$, ובפרט גם $Z(Aut(G))=\{Id_G\}$. כלומר, לחבורה חסרת מרכז, גם חבורת האוטומורפיזמים חסרת מרכז.

<u>שאלה 2</u>

הוכיחו $Aut(S_3)\cong S_3$.

<u>שאלה 3</u>

הוכיחו שלכל שתי חבורות G,H מתקיים $Inn(G)\times Inn(H)\cong Inn(G\times H)$.

<u>שאלה 4</u>

א) מצאו את מספר האוטומורפיזמים של $\mathbb{Z}_8$ ושל $\mathbb{Z}_{25}$.

ב) מצאו את מספר האוטומורפיזמים של $\mathbb{Z}_{25}\times\mathbb{Z}_8$.

<u>שאלה 5</u>

זהו את החבורה $Aut\left(GL_n(\mathbb{Z}_7)/SL_n(\mathbb{Z}_7)\right)$ (לכל $n>0$).

<u>שאלה 6</u>

תהא $G=U_{10}\times U_{10}$.

א) מהו $Inn(G)$?

ב) מהו $Aut(U_{10})$?

ג) הוכיחו או הפריכו:

(i) המיפוי $f(x)=x^4$ הוא אוטומורפיזם של G.

(ii) המיפוי $f(x)=x^5$ הוא אוטומורפיזם של G.

ד) האם $Aut(U_{10})\times Aut(U_{10})$ איזומורפי ל- $Aut(G)$?

<u>שאלת בונוס</u>

א. תהי G חבורה אבלית סופית. הוכיחו שיש שיכון של $U_{\exp(G)}$ ב- $Aut(G)$.
(את ההגדרה של האקספוננט של חבורה ניתן למצוא בחוברת הקורס, עמוד 68).

ב. תהי G חבורה סופית כלשהי. הוכיחו שאם $Aut(G)$ היא ציקלית, אזי היא מסדר זוגי.

בהצלחה!