25.08.15

88-112 אלגברה לינארית 1 – קורס קיץ תשע"ה - **פתרון**

מרצים: דר' מצרי אליהו, דר' אליהו-רובינסון מיטל, מר ארז שיינר

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הוראות:

- יש לענות על **כל** 6 השאלות. סה"כ הניקוד המקסימלי 110 נק' (כל ציון מעל 100 יעוגל ל100).
- יש לענות על **דפי הבחינה** בלבד. ניתן להשתמש במחברת כטיוטה, אך המחברת לא תיבדק כלל.

שאלה	ניקוד
1	
2	
3	
4	
5	
6	
סה"כ	

<u>חלק א'</u>

1. (20 נק') הוכיחו את המשפט הבא:

יהיו V,W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית, ותהי $T:V\to W$ העתקה לינארית.

הוכיחו כי $\dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T = \dim V$

2. (10 נק') תהי $B\in\mathbb{R}^{2\times2}$ ונגדיר העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times2}$ על ידי

$$\forall A\in\mathbb{R}^{2\times2}:T(\mathrm{A})=\mathrm{BA}$$

הוכיחו כי T הפיכה אם"ם B הפיכה.

<u>הוכחה</u>: אם T הפיכה אז T על ולכן עבור $I_2\in\mathbb{R}^{2\times2}$ קיימת $A\in\mathbb{R}^{2\times2}$ כך ש $T(A)=I_2$.

לכן $BA=I_2$, ולפי משפט אם מטריצה ריבועית הפיכה מימין היא הפיכה, כלומר B הפיכה.

כעת, נניח כי B הפיכה. ראשית נוכיח כי T חח"ע:

יהיו $A_1,A_2\in\mathbb{R}^{2\times2}$ כך ש $T(A_1)=T(A_2)$ צ"ל $A_1=A_2$.

נתון $BA_1=BA_2$.

נכפול את שני הצדדים בהופכית של B ונקבל

$B^{-1}BA_1=B^{-1}BA_2$ ולכן $A_1=A_2$.

כעת, כיוון ש T חח"ע, נובע כי $\dim\ker T=0$ ולכן לפי משפט הדרגה

$\dim\mathrm{kerT}+\dim\mathrm{ImT}=\dim\mathbb{R}^{2\times2}$ נובע $\dim\mathrm{ImT}=\dim\mathbb{R}^{2\times2}$ ולכן T על.

ביחד T חח"ע ועל ולכן הפיכה.

3. (20 נק') יהי $V=\mathbb{R}^n$ ויהי $B=\{v_1,...,v_n\}$ בסיס ל V, ותהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך שלכל $1\le i\le n-1$ מתקיים $Av_i=v_i$.

א. **הוכיחו/הפריכו:** $Av_n=v_n \Leftrightarrow A=I_n$

ב. הוכיחו כי $C(A)=span\{v_1,...,v_{n-1}\}$ אם"ם A אינה הפיכה.

<u>פתרון:</u>

א. **<u>הוכחה:</u>**

נניח $A=I_n$ אז ברור שלכל וקטור $v\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $Av=Iv=v$ ובפרט $Av_n=v_n$.

כעת נניח כי $Av_n=v_n$. יהי $v\in\mathbb{R}^n$ כלשהו אזי ניתן להציג אותו כצירוף לינארי של איברי הבסיס B: $v=a_1v_1+...+a_nv_n$ לכן $Av=a_1Av_1+...+a_nAv_n=a_1v_1+...+a_nv_n=v$.

בפרט, לכל וקטור מהבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$ מתקיים $Ae_i=e_i$.

אבל $Ae_i=C_i(A)$ ולכן עמודות A הן בעצם איברי הבסיס הסטנדרטי ולכן $A=I_n$.

ב. נניח כי $C(A)=span\{v_1,...,v_{n-1}\}$. לכן $\dim C(A)=n-1<n$ ולכן A אינה הפיכה כי $rank(A)\ne n$.

כעת נניח כי A אינה הפיכה. לכן $rank(A)\ne n$.

ברור לפי כפל עמודה עמודה כי לכל $1\le i\le n-1$ מתקיים $v_i=Av_i\in C(A)$.

לכן סה"כ $span\{v_1,...,v_{n-1}\}\subseteq C(A)$ ולכן $rank(A)\ge n-1$.

ביחד נובע כי $rank(A)=n-1$ ולכן

$\dim C(A)=\dim span\{v_1,...,v_{n-1}\}$.

הכלה חד כיוונית של תת מרחבים יחד עם שיוויון מימדים גוררת שיוויון ולכן

$C(A)=span\{v_1,...,v_{n-1}\}$

חלק ב'

4. (20 נק') נתונה $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$ ויהי הבסיס $B=\{1+x^2,-1+x,x-x^2\}$ ל $V=\mathbb{R}_2[x]$

א. מצאו **במפורש** העתקה לינארית T עבורה $A=[T]_B^B$

("במפורש" כלומר נוסחה מהצורה ... $T(a+bx+cx^2)=$).

ב. מצאו בסיס C עבורו מתקיים $A=[I]_C^B$.

פתרון:

א.

ראשית $[I]_S^B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$

לכן $[I]_B^S=\left([I]_S^B\right)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$

ביחד $[T]_S^S=[I]_S^B[T]_B^B[I]_B^S=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&3&5\\1&3&1\\-2&0&0\end{pmatrix}$

כיוון ש $[T]_S^S[v]_s=[Tv]_s$

נקבל $[T]_S^S\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-a+3b+5c\\a+3b+c\\-2a\end{pmatrix}=[T(a+bx+cx^2)]_s$

וסה"כ $T(a+bx+cx^2)=\frac{1}{2}(-a+3b+5c)+\frac{1}{2}(a+3b+c)x-ax^2$

ב.

ראשית $[I]_B^C=\left([I]_C^B\right)^{-1}=A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&0&2\\2&0&-1\\-1&1&2\end{pmatrix}$

אבל העמודות של $[I]_B^C$ הן הקואורדינטות של איברי הבסיס C לפי הבסיס B.

לכן, אם נסמן $C=\{w_1,w_2,w_3\}$ מתקיים כי

$[w_1]_B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ ולכן $w_1=\frac{1}{3}\left(-(1+x^2)+2(-1+\mathrm{x})-(\mathrm{x}-\mathrm{x}^2)\right)=-1+\frac{1}{3}x$

$[w_2]_B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ולכן $w_2=\frac{1}{3}\left(\mathrm{x}-\mathrm{x}^2\right)$

$[w_3]_B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ ולכן $w_3=\frac{1}{3}\left(2(1+x^2)-(-1+\mathrm{x})+2(\mathrm{x}-\mathrm{x}^2)\right)=1+\frac{1}{3}x$

סה"כ $C=\left\{-1+\frac{1}{3}x,\frac{1}{3}\left(\mathrm{x}-\mathrm{x}^2\right),1+\frac{1}{3}x\right\}$

5. (20 נק') תהי $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. נסמן את מרחב השורות של A ב $R(A)$, את מרחב העמודות ב $C(A)$ ואת מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית ב $N(A)=\{v\in\mathbb{R}^4 \mid Av=0\}$.

מצאו בסיס ומימד עבור:

א. $R(A)$

ב. $C(A)\cap N(A)$

ג. $C(A)+N(A)$

<u>פתרון</u>:

נדרג את המטריצה הבאה:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & 1 & 1 & c \\ -1 & 0 & 1 & -1 & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & d+a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d+a-b \end{array}\right)$$

א. בסיס ל $R(A)$ הוא $\{(1,1,0,1),(0,1,1,0)\}$ והמימד הוא 2

ב. לפי המטריצה המדורגת גילינו כי

$$C(A)=\left\{(a,b,c,d)\,\middle|\, \begin{array}{c} -a-b+c=0 \\ a-b+d=0 \end{array}\right\}$$

וכמו כן

$$N(A)=\left\{(a,b,c,d)\,\middle|\, \begin{array}{c} a+b+d=0 \\ b+c=0 \end{array}\right\}$$

לכן סה"כ
$$C(A)\cap N(A)=\left\{(a,b,c,d)\,\middle|\, \begin{array}{c} -a-b+c=0 \\ a-b+d=0 \\ a+b+d=0 \\ b+c=0 \end{array}\right\}$$

נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

לכן נגלה כי $C(A) \cap N(A) = \{(0,0,0,0)\}$ ולכן הבסיס הוא ϕ והמימד הוא אפס.

ג.

ראשית נמצא בסיס ל $N(A)$. נמשיך לדרג את A קנונית לקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון כללי למערכת ההומוגנית $Ax = 0$ הוא $(t-s,-t,t,s) = t(1,-1,1,0) + s(-1,0,0,1)$

ולכן בסיס ל $N(A)$ הוא $\{(1,-1,1,0),(-1,0,0,1)\}$

כמו כן שתי העמודות הראשונות של A מהוות בסיס ל $C(A)$.

ביחד $C(A)+N(A) = sp\{(1,0,1,-1),(1,1,2,0),(1,-1,1,0),(-1,0,0,1)\}$

לכן על מנת למצוא בסיס נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ולכן הבסיס ל $C(A)+N(A)$ הינו $\{(1,0,1,-1),(1,1,2,0),(1,-1,1,0),(-1,0,0,1)\}$ והמימד הוא 4.

<u>**הערה:**</u> כמו כן, לפי משפט המימדים היה ניתן להסיק כי

$$\dim(C(A)+N(A)) = \dim C(A) + \dim N(A) - \dim(C(A)\cap N(A)) = 2+2-0$$

ולכן $C(A)+N(A) = \mathbb{R}^4$, ניתן לבחור את הבסיס הסטנדרטי, והמימד הוא 4.

6. (20 נק')

א. מצאו לאילו ערכי a, אם בכלל, למערכת המשוואות הבאה מעל המספרים הממשיים יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1-a & 1-a & 0 & a^2-a^3 & 1-a \\ 1 & 1 & a-1 & 0 & 1 \\ a & a & 0 & a^3-a^2 & a \end{array}\right)$$

ב. תהי $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$ כך ש $A^TA^2=-I$. הביעו את $adj(A)$ באמצעות A.

<u>פתרון:</u>

א.

נדרג את המטריצה

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1-a & 1-a & 0 & a^2-a^3 & 1-a \\ 1 & 1 & a-1 & 0 & 1 \\ a & a & 0 & a^3-a^2 & a \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-aR_2]{R_1+R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-a^2 & a^3-a^2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-a^2 & a^3-a^2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+aR_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^3-a^2 & 0 \end{array}\right)$$

לכן לכל ערך של a קל לראות שבמטריצה המדורגת אין שורת סתירה ויש משתנה חופשי ולכן אינסוף פתרונות.

ב. נפעיל דטרמיננטה על שני האגפים ונקבל

$$\left|A^TA^2\right|=\left|-I\right|=(-1)^3=-1$$

אבל $\left|A^TA^2\right|=\left|A^T\right|\left|A^2\right|=\left|A\right|^3$

ביחד $\left|A\right|=-1$, ולכן A הפיכה.

כמו כן, ידוע כי $A^{-1}=\frac{1}{\left|A\right|}adj(A)$ לכן $-A^{-1}=adj(A)$.

כעת, $(-A^TA)A=I$ ולכן $A^{-1}=-A^TA$.

ביחד $adj(A)=A^TA$.