29.11.15

תורת הקבוצות

תרגול 6

הודעה! הבוחן ב- 14.12 ונהיה ב- 9:00.

טענה: אם α, β סודרים גבוליים ויש $f:\alpha\to\beta$ קופי ושומרת סדר

אזי $cof(\alpha)=cof(\beta)$

הוכחה:

($\geq$) יהי $g: cof\,\alpha\to\alpha$ קופי ושומרת סדר.

$f\circ g: cof\,\alpha\to\beta$ קופי ושומרת סדר.

ברור שהרכבת פונקציות שומרות סדר היא אכן שומרת סדר.

נותר להראות שהרכבת פונקציות שומרות סדר וקופי היא גם קופי

כלומר לכל $\gamma<\beta$ יש $\delta\in cof\,\alpha$ כך ש- $f\circ g(\delta)\geq\gamma$

$f:\alpha\to\beta$ קופי ולכן יש $x\in\alpha$ כך ש- $f(x)\geq\gamma$.

$g: cof(\alpha)\to\alpha$ קופי ולכן יש $y\in cof(\alpha)$ כך ש- $g(y)\geq x$

משימור סדר: $f\circ g(y)\geq f(x)\geq\gamma$ קופי כנדרש!

אבל $cof\,\beta$ הוא המינימלי שמקיים זאת

ולכן $cof\,\beta\leq cof\,\alpha$.

($\leq$) נרצה להראות פונקציה קופי שומרת סדר $cof\,\beta\to\alpha$

ונתון $f:\alpha\to\beta$, $h: cof\,\beta\to\beta$

פונקציות קופי ושומרות סדר. נבנה מ- $cof\,\beta$ ל-α-

יהיה $\gamma\in cof\,\beta$, נסתכל על $h(\gamma)\in\beta$.

מגבוליות β נקבל $h(\gamma)+1\in\beta$, כיוון ש- f קופי

קיים $\delta\in\alpha$ כך ש- $h(\gamma)+1\leq f(\delta)$

$\Leftarrow$ $h(\gamma)<f(\delta)$. נקח את ה-δ המינימלי שמקיים.

את הנ"ל- נגדיר $k: cof(\beta)\to\alpha$

ע"י $\gamma\mapsto\delta$ עבור δ שבחרנו.

נוכיח ש- k קופי.

והיה $x\in\alpha$ נרצה למצוא $y\in cof\beta$ כך ש- $K(y)\ge x$.

$f(x)\in\beta$ לכן יש $y\in cof\beta$ כך ש- $h(y)\ge f(x)$

נרצה להראות $K(y)\ge x$.

אז $K(y)=x^{\sim}$ כך ש- $f(x^{\sim})>h(y)$.

סה"כ $f(x^{\sim})>h(y)\ge f(x)$

משמרת סדר f נקבל $x<x^{\sim}$ סה"כ $x\le K(y)$.
כנדרש!

סה"כ $K: cof\beta\to\alpha$ קופי'

אך $cof\alpha$ המינימלי המקיים שיש פונקציה קופי'

סה"כ $cof\alpha\le cof\beta$ וסה"כ $cof\alpha=cof\beta$

מש"ל!

פונקציות מונוטוניות ורציפות

הגדרה: (מוכללת) מונוטונית - שומרת סדר.

רציפה - אם לכל β גבולי $f(\beta)=\sup_{\alpha<\beta} f(\alpha)$.

משפט: אם f מונוטונית ורציפה. אז לכל B.

$$f(\sup B)=\sup_{\alpha\in B} f(\alpha)$$

הוכחה: נסמן $\beta=\sup B$

נראה ש- $\beta\in B$ או ש- β גבולי!

$\sup B=\beta \Leftarrow$ לכל $\gamma\in B$ $\gamma\le\beta$.

נזכר ש $\sup B=\cup B$.

אמרנו באחד התרגולים שאם β הוא ה- sup של קבוצת סודרים שכולם קטנים (ממש) ממנו אז הוא גבולי!

אחרת לא לכל $\gamma\in B$ קטן ממש מ- β אז יש $\gamma=\beta$ ואז $\beta\in B$.

מקרה I: $\beta\in B$.

כאשר f שומרת סדר. אז לכל $\gamma\in B$ $f(\gamma)\le f(\beta)$

מכאן $\sup_{\gamma\in B} f(\gamma)\le f(\beta)$ אבל $f(\beta)\in\{f(\gamma)/\gamma\in B\}$ ולכן $f(\beta)\le\sup_{\gamma\in B} f(\gamma)$ סה"כ $f(\beta)=\sup_{\gamma\in B} f(\gamma)$ כנדרש!

מקרה (II): β גבולי. $\beta \notin B$.

ונזכור $f(\beta)=\sup_{\alpha\in\beta} f(\alpha)$, רוצים להראות $f(\beta)=\sup_{\alpha\in B} f(\alpha)$

צ.ל. $\sup_{\alpha\in B} f(\alpha) = \sup_{\alpha\in\beta} f(\alpha)$

$(\leq)$ ברור כי $B\subseteq\beta$

$(\geq)$ נראה שלכל $\alpha\in\beta$ יש $\gamma\in B$ כך ש- $f(\alpha)<f(\gamma)$

יהא $\alpha\in\beta$, β גבולי ולכן $\alpha+1\in\beta$.

β הוא הסופרימום (של B) ולכן $\alpha+1$ לא הסופרימום (של B).

לכן יש $\gamma\in B$ כך ש- $\alpha < \alpha+1 < \gamma$

מצאנו $\gamma\in B$ כך ש- $\alpha<\gamma$.

ואז $f(\alpha)<f(\gamma)$ לכן $\sup_{\alpha\in\beta} f(\alpha) \leq \sup_{\alpha\in B} f(\alpha)$

ס״ב שוויון! מש״ל!

מקרה פרטי: נקח $\{\alpha_i\}$ סדרה עולה

כך ש- $\sup\{\alpha_i\}=\beta$ ואז מסמנים $\lim \alpha_i=\beta$

וקיבלנו $f(\lim \alpha_i) = \lim f(\alpha_i)$ כמצופה מרציפות!

אקסיומת הבחירה!

תהא $S\neq\emptyset$ קבוצה כך ש- $\bigcup S\neq\emptyset$. אזי קיימת $f: S\to\bigcup S$

כך ש- $f(X)\in X$. לכל $\emptyset\neq X\in S$.

הערה (1) בשביל "לבחור" מתוך אוסף "סופי" של קבוצות

לא צריך את ~~הפונקציה~~ האקסיומה.

(2) אם יש כלל שבוחרים לפיו אז לא צריך את אקסיומת הבחירה. למשל אם יש אוסף קבוצות בנות מניה

כל קבוצה בת מניה ניתן לסדר לפי הסדר הטוב ולבחור את הראשון. (אבל [באופן כללי כבר צריך לכל אוסף קבוצות סופיות בשלב]

שימושים AC-8

הערות: ① בקורס הראשון הוכחנו שקבוצה סדורה היטב
$\iff$ אין לה שרשרת אינסופית יורדת.
נזכר שבהוכחה השתמשנו בבחירה איבר - הוא לא הראשון
ולכן נקח משהו קטן יותר, הוא גם לא ולכן נקח קטן יותר
וכו'... כדי "לבחור" כל שרשרת צריך את אקסיומת הבחירה.

② בהרצאה אמרנו שאם יש $f:X\to Y$ על
אז יש $g:Y\to X$ חח"ע.
בחרנו לכל איבר ב-Y יש מקור
אז g שולח את האיבר לאחד המקורות.

③ אלגברה - אידיאל מקסימלי!
④ טופולוגיה - טיכונוף
⑤ תורת המידה (שראינו גם שומי) - קיום קבוצה לא מדידה.
⑥ אפילו באינפי! רציפות קושי $\iff$ רציפות היינה.
היינה: f רציפה ב-a $\iff$ $a\neq x_n\to a$ $f(x_n)\to f(a)$
קושי: f רציפה ב-a $\iff$ לכל $\varepsilon>0$ נתון
קיים $\delta>0$ כך שאם $0<|x-a|<\delta$ אז $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

הוכחנו משם שרציפות לפי קושי נכשלת
קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$ קיים x כך ש-
$|x_\delta-a|<\delta$ אבל $|f(x_\delta)-f(a)|\geq\varepsilon$.
נקח $\delta=\frac{1}{k}$ לכל k יש x_k $|x_k-a|<\frac{1}{k}$
כלומר $x_k\to a$ אבל $|f(x_k)-f(a)|\geq\varepsilon$
ולכן $f(x_k)\not\to f(a)$ - השתמשנו בבחירה בסדרה
זו בדיוק אקסיומת הבחירה.
אין דרך טבעית לבחור אותה.

שקילויות לאקסיומת הבחירה.

לדוגמא: (1) הלמה של צורן. (2) עיקרון הסדר הטוב.

טענה: מהלמה של צורן: (ואקסיומת הבחירה).

(1) לכל מ"ו קיים <u>בסיס</u>.

<u>הוכחה:</u> נראה שקיימת בת"ל מקסימלית.

ואז נסיק שקיימת בת"ל מקסימלית.

נסדר את אוסף הבת"ל עד לסדר כלשהו. (זה סדר חלקי)

נשתמש בלמה של צורן (שבה <u>למעשה שקול</u>).

בקס"ח שאנו יגיב קבוצות בת"ל מעל במ"ו. זה סדר בהכלה.

מספיק להראות שלכל שרשרת מעל של קבוצות בת"ל

יש חסם עליון בקס"ח. כלומר יש קבוצה בת"ל שמכילה את כולם.

נראה שהאיחוד של שרשרת של קבוצות בת"ל גם בת"ל.

נניח $\{A_i\}$ שרשרת מעל של קבוצות בת"ל. נתבונן

ב- $\cup A_i$. נניח בשלילה שיש צירוף שמתאפס.

כלומר $x_1 \dots x_n \in \cup A_i$ כך ש- $a_1x_1+\dots+a_nx_n=0$.

לכל i: $x_i \in A_i$. $\{A_i\}$ שרשרת מעל נלקח בה"כ

$x_1 \dots x_n \in A_n$ (אפשר כי בסה"כ מספר סופי של x-ים)

ו- A_n בת"ל. לכן בהכרח $a_1=\dots=a_n=0$ כנדרש!

$\cup A_i$ חסם לקבוצה. מהלמה קיימת בת"ל מקסימלית

כנדרש! <u>מש"ל</u>

(2) $(\mathbb{C},+) \cong (\mathbb{R},+)$ כחבורות.

<u>הוכחה:</u> שניהם שדות מעל $\mathbb{Q}$.

מהלמה של צורן (ההוכחה קודם). העוצמה של הבסיס כשניהם

הוא $\aleph$. ובלינאריות רואים שיש מרחבים שבבסיס

שלהם עוצמה גודל הם איזו'. ומספיק איזו' של שדות

אז בפרט איזו' של חבורות.

תרגיל: הוכח כי התנאים שקולים:

(1) אקסיומת הבחירה.

(2) לכל $f:A\to B$ על קיימת $g:B\to A$ חח"ע כך ש- $f\circ g = id_B$.

פתרון: ($1 \Rightarrow 2$) בתרגול...

($2 \Rightarrow 1$)

תהיה S משפחת קבוצות זרות, [illegible]

נגדיר $f:S\to\cup S$ כך ש- $f(X)\in X$

ונגדיר $g:\cup S\to S$ כך ש- $g(x)=X$

כך ש- X היא הקבוצה <u>היחידה</u> אליה הוא שייך.

<u>מההנחה</u> קיימת $f:S\to\cup S$ כך ש- $f\circ g=id_{\cup S}$

נשים לב ש- g על!

כי לכל $\emptyset\neq X\in S$ יש קיים איבר ב- X שהוא המקור

תחת g!. [לא <u>פורמלי</u> - קבוצת המקורות היא X בדיוק!]

מתקיים. $g(f(X))=X$.

מהגדרת g נקבל $f(X)\in X$ ולכן f כדרוש!

אבל למה מספיק הבחירה מקבוצות לא ריקות וזרות

<u>טע..</u> תהיה S קבוצה זרות. $S=\{X_i\}_{i\in\alpha}$

נגדיר $\tilde{S}=\{X_i\times\{X_i\}\}_{i\in\alpha}$ וב- $\tilde{S}$ כל הקבוצות זרות.

ואז הפונקציה הבוחרת על $\tilde{S}$ נצמצם לרכיב הראשון.