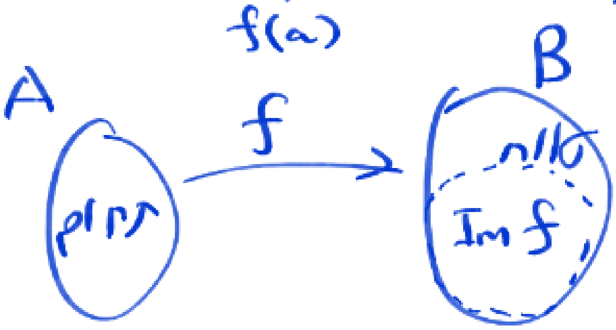
הרצאה 8

תזכורת - פונקציה $f: A \to B$

תת-קב' $f \subseteq A \times B$ כך שלכל $a \in A$ קיים ויחיד $b \in B$ כך ש- $\underset{f(a)}{\underset{\shortparallel}{(a,b)}} \in f$.



$$\mathrm{Im}\, f = \{ b \in B \mid \exists a \in A : b = f(a) \}$$

f על: $\mathrm{Im}\, f = B$

f חח"ע: $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

$f[\,]$, $f^{-1}[\,]$ פונק' על קב' החזקה

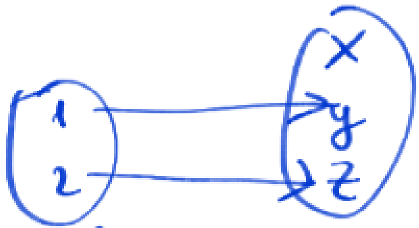
$f[\,]$ – תמונה, $f^{-1}[\,]$ – תמונה הפוכה

① $f[f^{-1}[Y]] \subseteq Y$

② $f^{-1}[f[X]] \supseteq X$

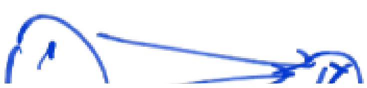
דוגמה:

①



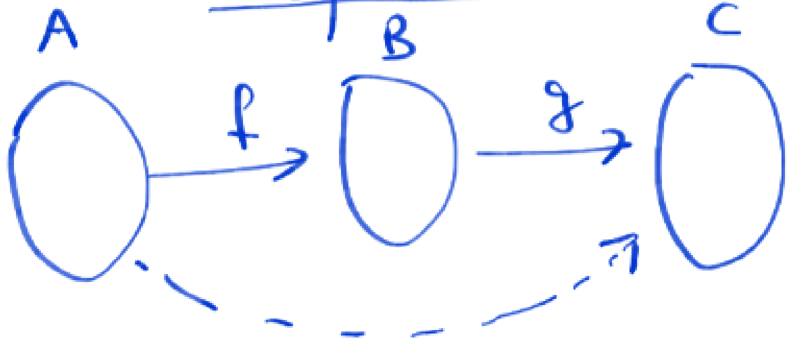
$$f[f^{-1}[\{\underbrace{x,y,z}\}]] = f[\{1,2\}] = \underbrace{\{y,z\}}$$

②



$$f^{-1}[f[\underbrace{\{1\}}]] = f^{-1}[\{x\}] = \underbrace{\{1,2\}}$$

הרכבת פונקציות



<u>הגדרה</u>: יהיו $f:A\to B$, $g:B\to C$ פונק'.
נגדיר את <u>ההרכבה</u>:

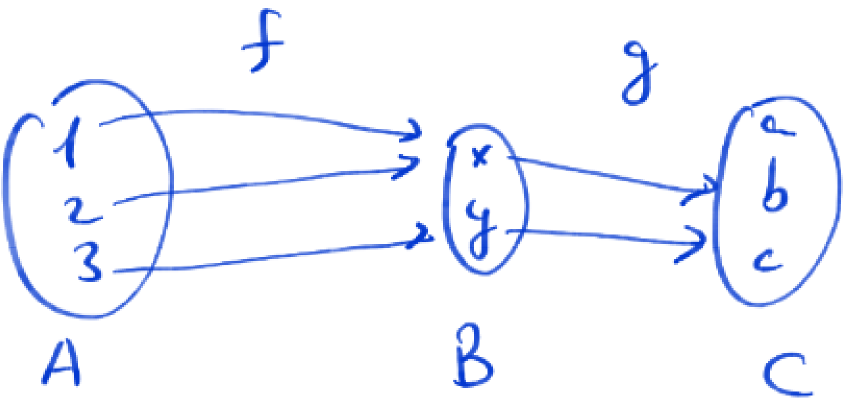
$$g\circ f : A\to C$$

הנתונה על ידי: $(g\circ f)(a) = g(f(a))$.

(מוגדרת היטב: מכיוון ש- f, g כאלו.)

<u>דוגמאות</u>:

(1)



$(g\circ f)(1) = b$

$-,,-(2) = b$

$-,,-(3) = c$

(2) $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$, $g:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$

$f(x)=2x$ $\quad$ $g(x)=\frac{1}{x}$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = \frac{1}{2x}$$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\tfrac{1}{x}\right) = \frac{2}{x}$$

(3) נניח $A\in\mathbb{F}^{n\times m}$, ישנה מטריצה:

$$f:\mathbb{F}^{m\times k}\longrightarrow\mathbb{F}^{n\times k}$$

$$f(X) = AX$$

נניח $B\in\mathbb{F}^{p\times n}$ מט' אחרת.

$$g:\mathbb{F}^{n\times k}\longrightarrow\mathbb{F}^{p\times k}$$

$$g(Y) = BY$$

מה ההרכבה?

$$\mathbb{F}^{m\times k}\xrightarrow{f}\mathbb{F}^{n\times k}\xrightarrow{g}\mathbb{F}^{p\times k}$$

$$(g\circ f)(X) = g(f(X)) = g(AX) = (BA)X$$

(3') U,V,W מ"ו, $T:U\to V$, ה

$S: V \to W$ ה"ל

אפשר להגדיר:

$S \circ T: U \to W$ (גם ה"ל)

תכונות:

(1) אסוציאטיביות:

$f: A \to B$
$g: B \to C$
$h: C \to D$

מתקיים:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

הוכחה:

$$\big(h \circ (g \circ f)\big)(a) = h\big((g \circ f)(a)\big) = h\big(g(f(a))\big)$$
$$\big((h \circ g) \circ f\big)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h\big(g(f(a))\big)$$

(2) האם יש קומוטטיביות?

$f: A \to A$
$g: A \to A$

האם $f \circ g = g \circ f$? לא!
(תרגיל בדף 2 לעיל.)

מה קורה לחח"ע ועל אחרי הרכבה?

טענה: תהיינה $f: A \to B$, $g: B \to C$ מקיימות.

1. $g \circ f$ על $\Rightarrow$ g על
2. $g \circ f$ חח"ע $\Rightarrow$ f חח"ע

דוגמה:

① $g\circ f: A\to C$ על, צ"ל: g על.

יהי $c\in C$, מאחר ש- $g\circ f$ על קיים $a\in A$:

$$(g\circ f)(a)=c$$

כלומר:

$$g(\underbrace{f(a)})=c$$

לכן מצאנו מקור ל- c תחת g. לכן g על.

② $g\circ f$ חח"ע, צ"ל: f חח"ע.

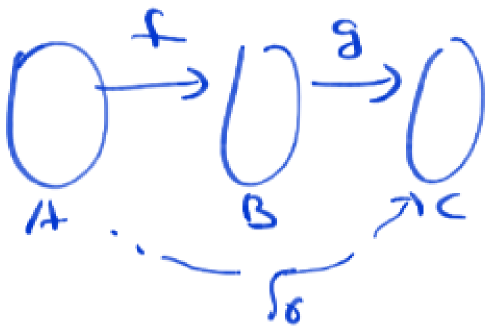
נניח $f(a_1)=f(a_2)$, מקיים: $g(f(a_1))=g(f(a_2))$

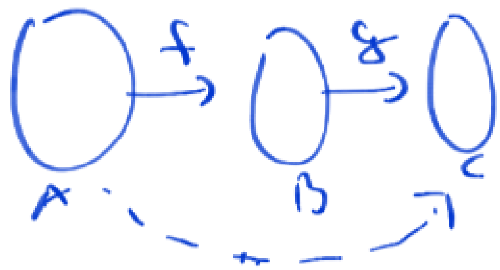
$$(g\circ f)(a_1)=(g\circ f)(a_2)$$

מאחר ש- $g\circ f$ חח"ע. לכן $\Rightarrow a_1=a_2$, לכן f חח"ע.

מש"ל.

לסיכום:

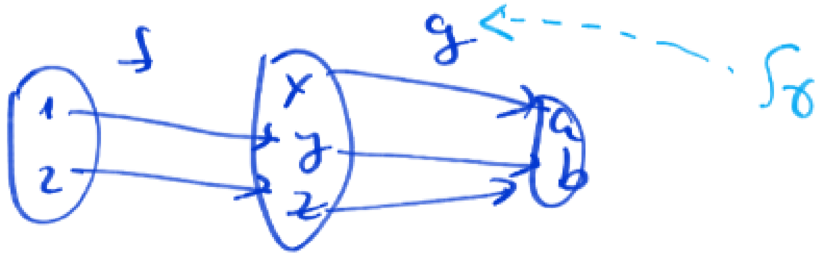
g על $\Leftarrow$ 

f חח"ע $\Leftarrow$ 

תחע

מה לגבי ההפך? דוגמאות

• ייתכן כי g על אך $g\circ f$ לא על.

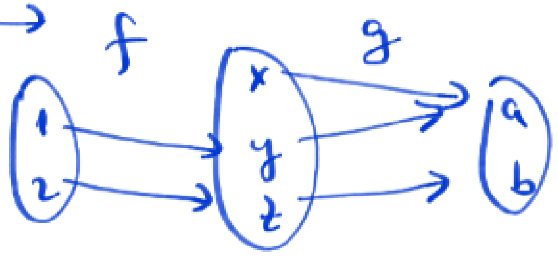


לא על

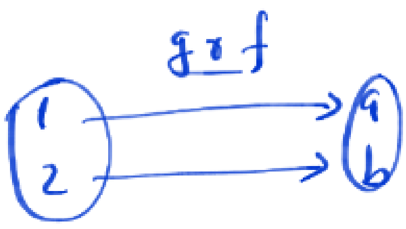
• ייתכן כי f חח"ע אך $g\circ f$ לא חח"ע.
הדוגמה לעיל עובדת.

• ייתכן $g\circ f$ על אך f לא על.

לא על



על



• ייתכן $g\circ f$ חח"ע אך g לא חח"ע.
אותה דוגמה.

טענה: תהיינה $f:A\to B$, $g:B\to C$ פונקציות. אזי:

① אם f,g חח"ע $\Leftarrow$ $g\circ f$ חח"ע

② אם f,g על $\Leftarrow$ $g\circ f$ על

הוכחה:

① נניח f,g חח"ע. צ"ל: $g\circ f$ חח"ע.

נניח:
$$(g\circ f)(a_1)=(g\circ f)(a_2)$$
$$\underset{g(f(a_1))}{\parallel}\qquad\qquad \underset{g(f(a_2))}{\parallel}$$

g חח"ע $\Leftarrow$ $f(a_1)=f(a_2)$

f חח"ע $\Leftarrow$ $a_1=a_2$, כלומר $g\circ f$ חח"ע.

② נניח g,f על. צ"ל: $g\circ f$ על.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

יהי $c\in C$.

g על, לכן קיים $b\in B$:
$$g(b)=c$$

כעת f על, לכן קיים $a\in A$: $f(a)=b$.

לכן:
$$(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(b)=c$$

לכן $g\circ f$ על.

מ.ש.ל.

פונקציות הפיכות

<u>הגדרה</u>: תהא A קבוצה. נגדיר את <u>פונקציית הזהות</u> על A:

$$I_A : A \longrightarrow A$$

$$\forall a \in A: \qquad I_A(a) = a$$

I_A <u>תמיד חח"ע ועל</u>.

<u>הגדרה</u>: תהא $f: A \to B$ פונקציה. נאמר כי f:

(1) <u>הפיכה מימין</u>: אם קיימת $g: B \to A$ כך ש-

$$(f \circ g) = I_B$$

(2) <u>הפיכה משמאל</u>: אם קיימת $h: B \to A$ כך ש-

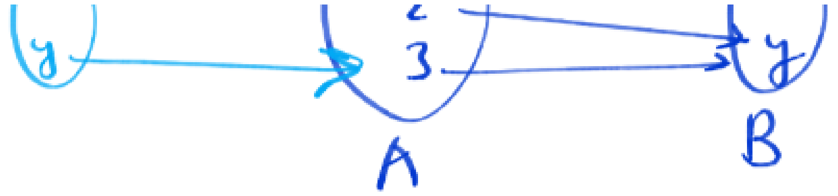
$$(h \circ f) = I_A$$

g <u>הופכית מימין</u> של f

h <u>הופכית משמאל</u> של f

(3) נאמר כי <u>f הפיכה</u> אם היא הפיכה מימין ומשמאל.

<u>דוגמה</u>:



f הפיכה מימין: אם $\exists$ $g: B \to A$ כך ש- $f \circ g = I_B$.

האם f הפיכה משמאל? נניח בשלילה כי ישנה הופכית משמאל $h: B \to A$ כך ש-

$$h \circ f = I_A$$

$$\underline{2} = I_A(2) = (h \circ f)(2) = h(f(2)) = \underline{h(y)}$$

$$\underline{3} = I_A(3) = (h \circ f)(3) = h(f(3)) = \underline{h(y)}$$

קיבלנו סתירה לחד-ערכיות של h.

משפט: תהי $f: A \to B$ פונקציה. $(A \neq \emptyset)$ אזי:

① f הפיכה מימין $\Longleftrightarrow$ f על.

② f הפיכה משמאל $\Longleftrightarrow$ f חח"ע.

הוכחה:

① $(\Leftarrow)$ נניח f הפיכה מימין, אזי:

$$\exists g: B \to A \quad : \quad f \circ g = I_B$$

עכ׳ נין להשלים שהוכחנו: ד 00.

(⇒) נניח f על. צ״ל: f הפיכה מימין.

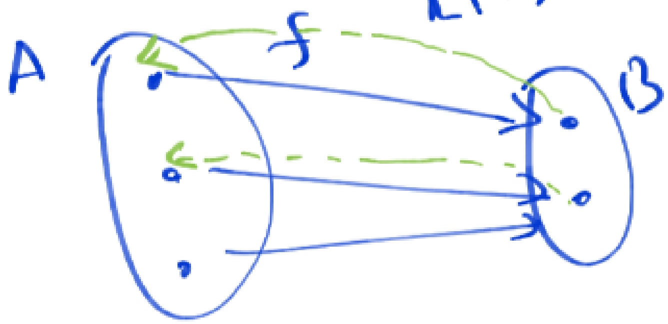
נבנה הפכית מימין $h: B \to A$

$(f \circ h = I_B)$

יהי $b \in B$. מאחר ש-f על, קיים לפחות $a \in A$ אחד כך ש- $f(a) = b$.

לכל $b \in B$, נבחר $a \in A$ כלשהו, שמקיים כך ש- $f(a) = b$ ונגדיר:

$$h(b) := a$$



מתקיים: $(f \circ h)(b) = f(\underbrace{h(b)}_{a}) = f(a) = b$.

וזה לכל $b \in B$, כלומר $f \circ h = I_B$ כנדרש.

② (⇐) נניח f הפיכה משמאל ונוכיח f חח״ע.

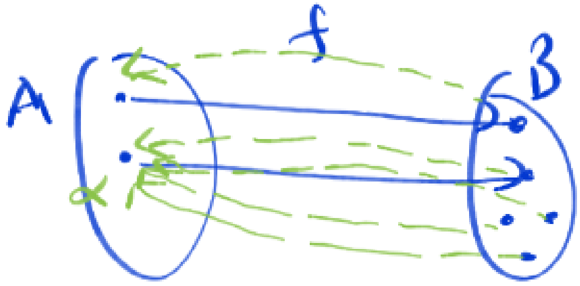
קיימת $g: B \to A$ כך ש- $\underbrace{g \circ f = I_A}_{\text{חח״ע}}$.

I_A חח״ע, ולכן מטלמה שראינו, f חח״ע.

($\Leftarrow$) נניח f חח"ע וצ"ל: f הפיכה משמאל.

נבנה: $h: B \to A$ כך ש-

$$h \circ f = I_A.$$



יהי $b \in B$.

אם $b \in Im f$, אז

$$f^{-1}[\{b\}] \neq \emptyset$$

אך f חח"ע, לכן הוא קב' מגודל 1.

נגדיר אם כן את $h(b)$ בתור האבר היחיד של $f^{-1}[\{b\}]$.

אם $b \notin Im f$, נבחר $\alpha \in A$ שרירותי $(A \neq \emptyset)$ ונגדיר:

$$h(b) = \alpha.$$

מתקיים:

$$(h \circ f)(a) = h(\underbrace{f(a)}_{b}) = a$$

מהגדרת h

$$\{a\} = f^{-1}[\{b\}]$$

קיבלנו: $h \circ f = I_A$. מש"ל.

מסקנות:

① f הפיכה $\Longleftrightarrow$ f חח"ע ועל.

② f,g הפיכות מימין $\Leftarrow$ $g\circ f$ הפיכה מימין.

(ראינו שהרכבה של על היא על.)

③ f,g הפיכות משמאל $\Leftarrow$ $g\circ f$ הפיכה משמאל.

(ראינו שהרכבה חח"ע היא חח"ע)

$f: A\to B$
$g: B\to C$

④ f,g הפיכות $\Longleftarrow$ $g\circ f$ הפיכה

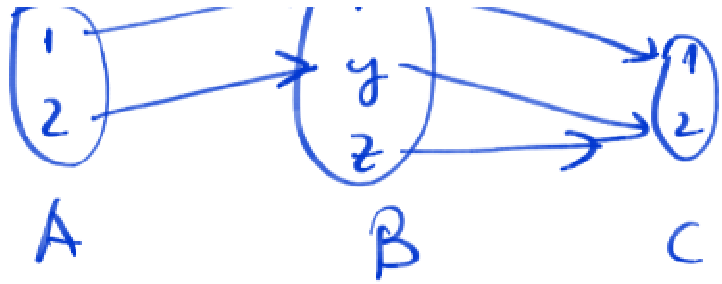
(הוכחה: ממסקנות 2,3 נקבל $g\circ f$ הפיכה.)

⑤ $g\circ f$ הפיכה $\Leftarrow$ f הפיכה משמאל, g הפיכה מימין

(הוכחה: $\underbrace{(h_1\circ g)}_{\text{הופכי משמאל של } f}\circ f = h_1\circ(g\circ f) = I_A$

$g\circ\underbrace{(f\circ h_2)}_{\text{הופכי מימין של } g} = (g\circ f)\circ h_2 = I_C$.)

הערה: ייתכן $g\circ f$ הפיכה אך f,g אינן הפיכות.



f לא על, לכן לא הפיכה

g לא חח"ע, לכן לא הפיכה

אך $g \circ f$ הינה הזהות על A (I_A)
ולכן הפיכה.

10.50

דוגמאות:

① $f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(n) = \begin{cases} m & ,n=2m \\ m & ,n=2m-1 \end{cases}$$

$1 \to 1$
$2 \to 1$

$3 \to 2$
$4 \to 2$

$5 \to 3$
$6 \to 3$

$\vdots$

f על אך לא חח"ע. לכן הפיכה מימין
אך לא משמאל:

$$g(n) = 2n$$

$$(f \circ g)(n) = f(2n) = n$$

ט

כלומר $f\circ g = I_{\mathbb{N}}$.

② $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ חח"ע, לא על.

$f(n)=e^n$ לכן הפיכה משמאל אך לא מימין.

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{N}$$

$$g(x)=\begin{cases} |\lceil \ln|x| \rceil| & ,x\neq 0 \\ 17 & ,x=0 \end{cases}$$

נחשב:

$$(g\circ f)(n)=g(e^n)=$$

$$=|\lceil \ln|e^n| \rceil| = |\lceil n \rceil| = |n| = n$$

ולכן:

$$g\circ f = I_{\mathbb{N}}.$$

<u>טענה:</u> תהא $f:A\to B$ פונקציה הפיכה. אזי ההופכית מימין שווה להופכית משמאל.

<u>הוכחה:</u> נניח: $g,h:B\to A$

$$f\circ g = I_B$$

$$h\circ f = I$$

$$h \circ f = I_A$$

נקבל:

$$h \circ (\overbrace{f \circ g}^{I_B}) = h \circ I_B = h$$

$\|$ אסוציאטיביות ההרכבה:

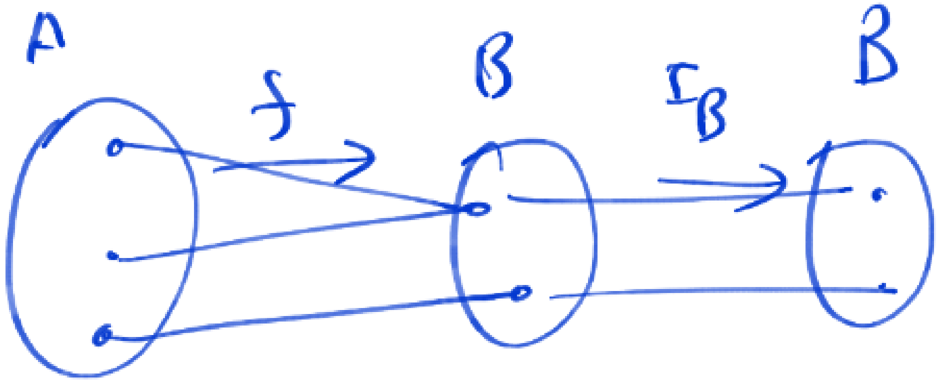
$$(\underbrace{h \circ f}_{I_A}) \circ g = I_A \circ g = g$$

לכן $g = h$ כלומר ההופכית משמאל ומימין - שוות. מ.ש.ל.

הערה: לכל פונקציה $f: A \to B$ מתקיים:

$$f \circ I_A = f \quad (1)$$

$$I_B \circ f = f \quad (2)$$



$$(\underbrace{I_B \circ f})(a) = I_B(f(a)) \underset{\text{הגדרת } I_B}{=} f(a) \qquad (2)$$

בדומה, (1).

סימון: ראינו שאם $f: A \to B$ הפיכה אז

ההופכית מימין ומשמאל שווה זו לזו.

מסמנים במקרה כזה את <u>ההופכית</u>:

$$\underline{f^{-1}: B \to A}$$

<u>שימו לב</u>: לא להתבלבל עם: $f^{-1}[\ ]: P(B) \to P(A)$!

אם f הפיכה, מתקיים:

$$f^{-1}[Y] = \{ f^{-1}(y) \mid y \in Y \}$$

בפרט:

$$f^{-1}[\{y\}] = \{f^{-1}(y)\}.$$

<u>טענה</u>: אם $f: A \to B$, $g: B \to C$ הפיכות אזי:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

<u>הוכחה</u>: חישוב פשוט יראה:

$$\cdot\ (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) \underset{\text{אסוצ'}}{=} g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} =$$

$$= g \circ I_B \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = I_C$$

$$\cdot\ (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) \underset{\text{אסוצ'}}{=} f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f =$$

$$= f^{-1}\circ I_B \circ f = f^{-1}\circ f = I_A$$

מ.ש.ל.

<u>הגדרה</u>: פונקציה חח"ע ועל מקבוצה A לעצמה

$$f: A\to A$$

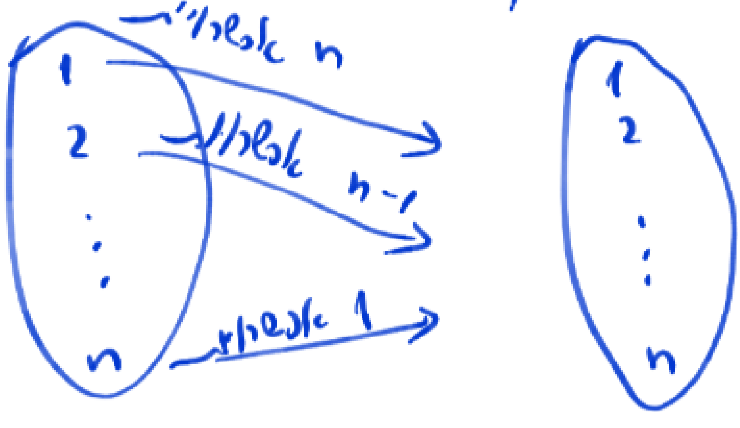
נקראת <u>תמורה</u> (פרמוטציה).

את אוסף התמורות של קבוצה בת n איברים
$\{1,2,\dots,n\}$

מסמנים:

$$S_n = \{f:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\} \mid f \text{ חח"ע ועל}\}$$

כמה תמורות יש של קבוצה בת n איברים?



$$|S_n| = n!$$

<u>הערה</u>: אם A,B סופיות מאותו גודל

1- $f: A \to B$ פונקציה אזי:

f חח"ע $\Longleftrightarrow$ f על.

<u>הוכחה:</u>

$(\Longleftarrow)$ באינדוקציה על $n=|A|=|B|$.

עבור $n=1$, ברור כי f על.

$\underline{|A|=|B|=n+1}$. נניח $f: A \to B$ חח"ע.

יהי $a \in A$ כלשהו.

נתבונן בפונקציה:

$$\tilde{f}: A \setminus \{a\} \longrightarrow B \setminus \{f(a)\}$$

$$\tilde{f}(x) := f(x)$$

מדוע $\tilde{f}$ מוגדרת היטב? נניח בשלילה ש-

$x \in A \setminus \{a\}$ כך ש- $\tilde{f}(x) \notin B \setminus \{f(a)\}$

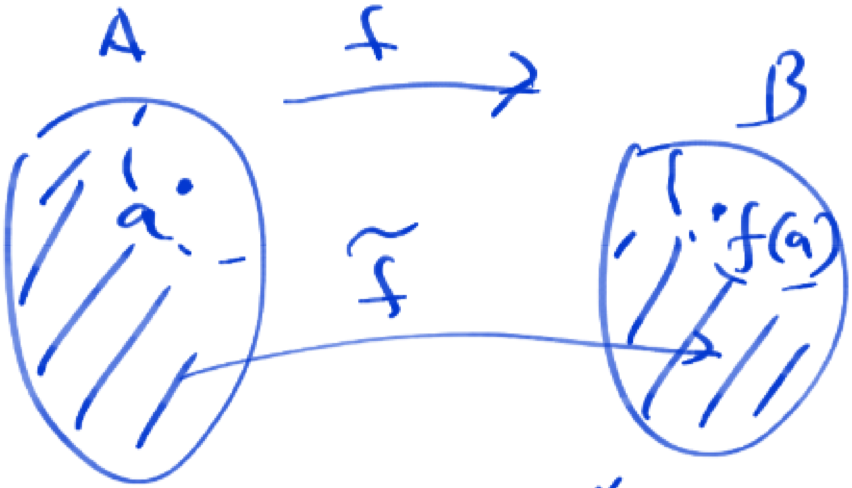
כלומר:

$$f(x) \underset{\text{לפי הגדרת } \tilde{f}}{=} \tilde{f}(x) = f(a)$$

מחח"ע f $\Leftarrow$ $x=a$, בסתירה.

ונדע כי: $|A \setminus \{a\}| = n$

$$|B \setminus \{f(a)\}| = n$$



$\tilde f$ חח״ע מכיוון ש- f חח״ע

$$\left(\tilde f(x) = \tilde f(y) \underset{\text{חח״ע}}{\Rightarrow} x = y \right)$$

$$f(x) \quad f(y)$$

ולפי הנחת האינדוקציה (על n), $\tilde f$ על.

$$\operatorname{Im} f \supseteq \operatorname{Im} \tilde f \cup \{f(a)\} =$$

$$= B \setminus \{f(a)\} \cup \{f(a)\} = B$$

לכן: $\operatorname{Im} f = B$; f על.

$(\Leftarrow)$ תרגיל רשות.

עוצמות - סוגי אינסוף

״המלון של הילברט״

(I)

1 2 3 ...

האורח החדש $\Longrightarrow$ 1 2 3 4 ...

(II)

1 2 3 4 ...

מגיע אוטובוס אינסופי

1 2 3 ...

מבקשים מכל אורח להתקדם לחדר $n \mapsto 2n$.
כעת החדרים האי-זוגיים פנויים. וניתן לשכן
את התיירים ב-

1 2 3 ...

התייר ה-m לחדר ה-$2m-1$.

(III) מגיעה סדרה אינסופית של אוטובוסים אינסופיים:

1 2 3 ...   1 2 3 ...   1 2 3 ...   ...

נבקש מכל אורח לעבור לחדר $n \mapsto 2n$.

כעת החדרים האי-זוגיים פנויים.

את האוטובוס הראשון נשכן ב-

$\{3, 9, 27, \ldots\} = \{3^1, 3^2, 3^3, \ldots\}$

השני -

$\{5, 25, 125, \dots\} = \{5^1, 5^2, 5^3, \dots\}$

וכן הלאה, לכן ∞ מספרים ראשוניים.

יש פירוק יחיד לראשוניים ולכן אף חזקה לא שווה לשני אחרים.

בחזרה למתמטיקה פורמלית...

<u>הגדרה:</u> תהיינה A,B קבוצות. נאמר כי $A\sim B$ A ו-B <u>שקולות עוצמה</u> אם <u>קיימת</u> פונקציה:

$$f: A\longrightarrow B$$

שהיא חח"ע ועל.

<u>הערה</u> – במקרה הסופי, $A\sim B \iff |A|=|B|$ אבל גם אחרים.

<u>טענה:</u> שקילות עוצמה הינה יחס שקילות על קבוצות.

<u>הוכחה:</u>

(1) <u>רפלקסיביות:</u> $I_A : A\to A$ חח"ע ועל.

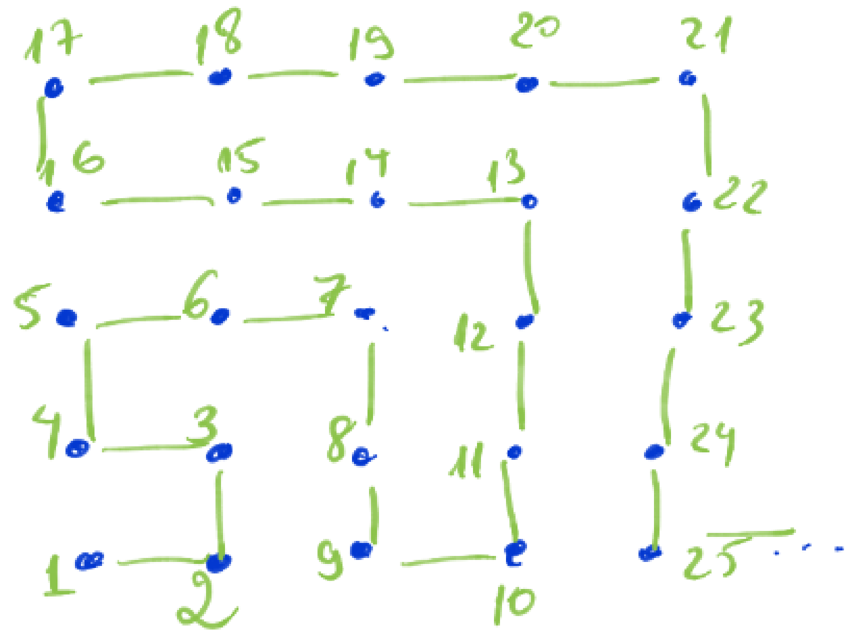
(2) <u>סימטריות:</u> אם $f:A\to B$ חח"ע ועל, גם $f^{-1}:B\to A$ חח"ע ועל.

3) טרנזיטיביות: ראינו כי אם $f: A\to B$, $g: B\to C$
חח"ע ועל, אזי גם $g\circ f: A\to C$ חח"ע ועל.
מ.ש.ל.

טענה: $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

$$\{(n,m) \mid n\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N}\}$$

הוכחה: נשרטט מתאם חח"ע ועל $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.



תרגיל רשות/בונוס - מצאו נוסחה המגדירה את f.

דיבור על שקילות, עוצמה כמדד למתי קבוצות אינסופיות הן "באותו גודל". מסמנים: $A\sim B \Rightarrow |A|=|B|$.

מתי קבוצה נתונה "קטנה" מקבוצה אחרת?

הגדרה: נאמר כי $|A| \leq |B|$
"העוצמה של A קטנה או שווה מהעוצמה של B":
אם קיימת פונקציה חח"ע:
$f: A \to B$.

טענה: היחס $|A| \leq |B|$ הוא יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי.

מתקיים: אם $|A| \leq |B|$, $|B| \leq |A|$ אז $A \sim B$.
$|A| = |B|$

טענה זו נקראת משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין, ונוכיח אותה בהמשך.

הערה: יתכן ש-$A \sim B$ אך $f: A \to B$
שהיא חח"ע ולא על!

$\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ אך $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$f(n) = n+1$ חח"ע ולא על.

מתי נאמר כי "העוצמה של A קטנה ממש מהעוצמה של B"?

אם $|A| \leq |B|$, כלומר קיימת $f: A \to B$ חח"ע,
וגם $|A| \neq |B|$, כלומר, לא קיימת פונקציה
" . .

$g:A\to B$ חח"ע ועל.

<u>הערה</u>: $|A|\le|B| \iff$ קיימת פונקציה <u>על</u>: $g:B\to A$.

<u>הוכחה</u>: $(\Leftarrow)$ נתון כי קיימת $f:A\to B$ חח"ע,
צ"ל: $g:B\to A$ על.
f חח"ע ולכן הפיכה משמאל, כלומר יש $g:B\to A$:
$$g\circ f = I_A$$
לכן, g הפיכה מימין ולכן על.
$(\Rightarrow)$ נתון כי קיימת פונקציה על $g:B\to A$,
צ"ל $|A|\le|B|$ כלומר יש $f:A\to B$ חח"ע.
g על ולכן הפיכה מימין, כלומר יש $f:A\to B$:
$$g\circ f = I_A$$
לכן, f הפיכה משמאל ולכן חח"ע. מ.ש.ל.

<u>הגדרה</u>: לעוצמה של המספרים הטבעיים קוראים:
$$\aleph_0 \quad \text{(אָלֶף - אפס)}$$

קבוצה שקולת עוצמה לטבעיים קוראים <u>בת-מניה</u>, וכותבים:

$$|A| = \aleph_0.$$

דוגמה: $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = \aleph_0$ (ראינו).

<u>טענה</u>: $\aleph_0$ היא העוצמה האינסופית הקטנה ביותר. כלומר:

אם A קבוצה אינסופית אז $\aleph_0 \le |A|$.

<u>הוכחה</u>: תהא A אינסופית. צ"ל:

$\exists f:\mathbb{N}\to A$ חח"ע.

נבנה את f באינדוקציה.

A אינסופית, בפרט לא ריקה ולכן יהי $a\in A$ כלשהו, ונגדיר:

$$f(1)=a.$$

נניח כי הגדרנו את $f(1),\dots,f(n)$ באופן שכולם שונים זה מזה.

A אינסופית, ולכן בפרט $A\setminus\{f(1),\dots,f(n)\}\neq\emptyset$.

יהי $b\in A\setminus\{f(1),\dots,f(n)\}$, ונגדיר:

$f(n+1)=b$.

ברור כי f חח"ע.

הוכחה ש-f חח"ע: באינדוקציה.

צ"ל: אם $\underline{f(n_1)=f(n_2)}$ $\Leftarrow$ $n_1=n_2$.

נוכיח באינדוקציה על $n=\max\{n_1,n_2\}$.

עבור $n=1$, הטענה ברורה: $n_1=n_2=1$.

עבור $n+1$, נניח $f(n_1)=f(n_2)$. בה"כ נניח כי n_1 המקסימלי, כלומר: $n_1=n+1$,

אם $n_2=n+1$ סיימנו. אחרת, $n_2\le n$.

לפי הבנייה של f בשלב $n+1$, ונקבל:

$$f(n_1)=f(n+1)\in A\setminus\{\underbrace{f(1),\dots,f(n)}_{\uparrow\ f(n_2)}\}$$

כי $n_2\le n$ $\Leftarrow$ בפרט, $f(n_1)\neq f(n_2)$ בסתירה להנחה $f(n_1)=f(n_2)$.

מ.ש.ל.

<u>דוגמא:</u> ① A = מס' טבעיים זוגיים.

$|A|=\aleph_0$.

$N \to A$

$f: A \longrightarrow N$

מוגדרת היטב,
חח"ע ועל.

$$f(a) = \frac{a}{2}$$

2. $|Z| = \aleph_0$

צ"ל פונקציה חח"ע ועל מאחת
לשנייה.

$$f: N \longrightarrow Z$$

לפי:

$$f(1) = 0$$

$$f(2n) = n$$

$$f(2n+1) = -n$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4 & 5 & \cdots
\end{array}$$