# תרגיל 7 אינפי 3

1. ראשית נחשב את הנגזרות החלקיות עד סדר 3:

$$f_x = e^x \cos y, \quad f_y = -e^x \sin y$$

$$f_{xx} = e^x \cos y, \quad f_{xy} = -e^x \sin y, \quad f_{yy} = -e^x \cos y$$

$$f_{xxx} = e^x \cos y, \quad f_{xxy} = -e^x \sin y, \quad f_{xyy} = -e^x cosy, \quad f_{yyy} = e^x \sin y$$

עבור הנקודה $(0,0)$, הנגזרות הן:

$$f_{xxx}(0,0) = 1, \quad f_{xxy}(0,0) = 0, \quad f_{xyy}(0,0) = -1, \quad f_{yyy}(0,0) = 0$$

הנוסחא לדיפרנציאל היא:

$$\frac{3!}{3!0!} f_{xxx}(0,0)h_1^3 + \frac{3!}{2!1!} f_{xxy}(0,0)h_1^2 h_2 + \frac{3!}{1!2!} f_{xyy}(0,0)h_1 h_2^2 + \frac{3!}{0!3!} f_{yyy}(0,0)h_2^3$$

לכן הדיפרנציאל בנקודה $(0,0)$ הוא:

$$h_1^3 - 2h_1 h_2^2$$

הערה: יש כאלה שמסמנים $dx, dy$ או $\Delta x, \Delta y$ במקום $h_1, h_2$. כעת עבור הנקודה $(0, \frac{\pi}{2})$ נקבל כי

$$f_{xxx}(0, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad f_{xxy}(0, \frac{\pi}{2}) = -1, \quad f_{xyy}(0, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad f_{yyy}(0, \frac{\pi}{2}) = 1$$

לכן הדיפרנציאל בנקודה $(0, \frac{\pi}{2})$ הוא:

$$-2h_1^2 h_2 + h_2^3$$

2. לפי הנוסחא לדיפרנציאל

$$d^k_{(0,0)} f(x,y) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = k} \frac{k!}{\alpha_1! \alpha_2!} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}(0,0) x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}$$

במקרה שלנו

$$f_x(x,y) = g'(x+y), \quad f_y(x,y) = g'(x+y)$$

ולכן

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}(x,y) = g^{(k)}(x+y)$$

כלומר

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}(0,0)=g^{(k)}(0)$$

נציב זאת בנוסחא של הדיפרנציאל ונקבל

$$\begin{aligned}d^k_{(0,0)}f(x,y)&=\sum_{\alpha_1+\alpha_2=k}\frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}(0,0)x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}=\\&=\sum_{\alpha_1+\alpha_2=k}\frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!}\cdot g^{(k)}(0)x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}=g^{(k)}(0)\sum_{\alpha_1+\alpha_2=k}\frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!}\cdot x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}\end{aligned}$$

וזה שווה לפי הבינום של ניוטון ל

$$g^{(k)}(0)(x+y)^k$$

3. נחשב את כל הנגזרות החלקיות מסדר $0$ ועד סדר 3, בנגזרות עד סדר 2 נציב את הנקודה $(1,0)$ בנגזרות מסדר 3 (שהן ישמשו לשארית לגרנז') - נציב את $(1+\theta(x-1),\theta y)$

$$f_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_{xx}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\quad f_{xy}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\quad f_{yy}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

נחשב קודם את הפולינום עד סדר 2, נציב בנגזרות שחישבנו את הנקודה $(1,0)$:

$$f(1,0)=1,\quad f_x(1,0)=1,\quad f_y(1,0)=0$$

$$f_{xx}(1,0)=0,\quad f_{xy}(1,0)=0,\quad f_{yy}(0,0)=1$$

לכן פולינום טיילור (בלי שארית) עד סדר 2 סביב $(1,0)$ הוא:

$$f(x,y)=1+(x-1)+\frac{1}{2}y^2$$

בשביל שארית לגרנז' נחשב את הנגזרות מסדר $3$

$$f_{xxx}=-3\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},\quad f_{xxy}=\frac{2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-3\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$f_{xyy}=\frac{2x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-3\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},\quad f_{yyy}=-3\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

נסמן

$$\theta_x=1+\theta(x-1),\quad \theta_y=\theta y$$

ונקבל ששארית לגרנז' היא:

$$\frac{1}{3!}(-3\frac{\theta_x\theta_y^2}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}}(x-1)^3+3\cdot(\frac{2\theta_y}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{3}{2}}}-3\frac{\theta_y^3}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}})(x-1)^2y+$$
$$+3\cdot(\frac{2\theta_x}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{3}{2}}}-3\frac{\theta_x^3}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}})(x-1)y^2-3\frac{\theta_x^2\theta_y}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}}y^3)$$

לכן הפולינום כולו עם השארית הוא:

$$f(x,y)=1+(x-1)+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}(-\frac{\theta_x\theta_y^2}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}}(x-1)^3+(\frac{2\theta_y}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{3}{2}}}-3\frac{\theta_y^3}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}})(x-1)^2y$$
$$+(\frac{2\theta_x}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{3}{2}}}-3\frac{\theta_x^3}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}})(x-1)y^2-\frac{\theta_x^2\theta_y}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}}y^3)$$

4. היות ו

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

נקבל כי

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^5)$$

בדומה:

$$\sin 2y=2y-\frac{(2y)^3}{3!}+\frac{(2y)^5}{5!}+o(y^5)$$

ולכן:

$$e^{x^2}sin(2y)=(1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(|x|^5))(2y-\frac{(2y)^3}{3!}+\frac{(2y)^5}{5!}+o(|y|^5))=$$
$$2y+2x^2y+x^4y-\frac{4}{3}y^3-\frac{4}{3}x^2y^3+\frac{(2y)^5}{5!}+o(||(x,y)||^5)$$

5. נחשב טור טיילור עד סדר 3 סביב $(a,b)$:

$$f_x=3x^2+y,\quad f_y=x+2y$$

$$f_{xx}=6x,\quad f_{xy}=1,\quad f_{yy}=2$$

$$f_{xxx}=6,\quad f_{xxy}=f_{xyy}=f_{yyy}=0$$

נציב את $(a,b)$ ונקבל:

$$f(a,b)=a^3+ab+b^2$$

$$f_x(a,b)=3a^2+b, \quad f_y(a,b)=a+2b$$

$$f_{xx}(a,b)=6a, \quad f_{xy}(a,b)=1, \quad f_{yy}(a,b)=2$$

$$f_{xxx}(a,b)=6, \quad f_{xxy}(a,b)=f_{xyy}(a,b)=f_{yyy}(a,b)=0$$

ולכן טור טיילור הוא

$$a^3+ab+b^2+(3a^2+b)(x-a)+(a+2b)(y-b)+\frac{1}{2}(6a(x-a)^2+2(x-a)(y-b)+2(y-b)^2)+$$
$$+\frac{1}{3!}(6(x-a)^3)$$

שזה בכתיבה קצת יותר יפה:

$$a^3+ab+b^2+(3a^2+b)(x-a)+(a+2b)(y-b)+3a(x-a)^2+(x-a)(y-b)+(y-b)^2+(x-a)^3$$

6. נחשב נגזרות עד סדר 2:

$$f_x=\cos(xe^y)e^y, \quad f_y=\cos(xe^y)xe^y$$

$$f_{xx}=-e^{2y}\sin(xe^y), \quad f_{xy}=-\sin(xe^y)xe^{2y}+\cos(xe^y)e^y, \quad f_{yy}=xe^y\cos(xe^y)-\sin(xe^y)x^2e^{2y}$$

נציב את הנקודה $(\frac{\pi}{2},0)$ ונקבל:

$$f(\frac{\pi}{2},0)=1$$

$$f_x(\frac{\pi}{2},0)=0, \quad f_y(\frac{\pi}{2},0)=0$$

$$f_{xx}(\frac{\pi}{2},0)=-1, \quad f_{xy}(\frac{\pi}{2},0)=-\frac{\pi}{2}, \quad f_{yy}(\frac{\pi}{2},0)=-\frac{\pi^2}{4}$$

לכן הפולינום עד סדר $2$ עם שארית פיאנו הוא:

$$f(x,y)=1+\frac{1}{2}(-(x-\frac{\pi}{2})^2-\frac{\pi}{2}(x-\frac{\pi}{2})y-\frac{\pi^2}{4}y^2)+o(||(x,y)||^2)$$

7.

(א) היות ו

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

נקבל ש

$$e^{x^2y^3} = 1 + x^2y^3 + \frac{x^4y^6}{2} + \frac{x^6y^9}{6} + o(||x,y||^{19})$$

(נשים לב ש $x^8y^{12}$ הוא כבר איבר ממעלה 20).

(ב) היות ואין בפיתוח טיילור אף איבר מסדר 19 ברור ש

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x^8 \partial^{11}} = 0$$