מבחן בקורס הכנה למתמטיקה לקראת שנת תשע"ט

מרצה: דר' ארז שיינר. תאריך: 07/09/18

הוראות: יש לפתור כמה שיותר שאלות ולנמק היטב. כל שאלה שווה 17 נקודות. בהצלחה (=

1. נגדיר את הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} x & x>1 \\ |x| & -1<x\le 1 \\ -x & x\le -1 \end{cases}$$

מצאו לאילו ערכי x מתקיים אי השוויון $f(x^2)+f\left(x^2-2\right)\ge x^2$

מקרה ראשון $x>1$

במקרה זה $x^2>1$ ולכן

$$f(x^2)=x^2$$

מה לגבי x^2-2?

נבדוק מתי $x^2-2>1$ בתחום, זה כאשר $x^2>3$ בתחום כלומר כאשר $x>\sqrt{3}$

מקרה 1א בו $x>\sqrt{3}$

$$f(x^2-2)=x^2-2$$

סה"כ אי השיוויון נראה כך בתחום 1א:

$$x^2+x^2-2\ge x^2$$

$$x^2\ge 2$$

זה נכון בתחום זה כיוון שב1א מתקיים כי $x^2>3$

כעת נעבור לתחום 1ב' בו $1<x\le\sqrt{3}$ ואז

$$1<x^2\le 3$$

$$-1<x^2-2\le 1$$

ולכן בתת תחום זה

$$f(x^2-2)=|x^2-2|$$

לכן אי השיוויון בתת תחום זה נראה כך

$$x^2+|x^2-2|\ge x^2$$

$$|x^2-2|\ge 0$$

נכון בכל התחום.

כעת נעבור לתחום השני $0 \le x \le 1$ בתחום זה $0 \le x^2 \le 1$

$$f(x^2) = |x^2| = x^2$$

אבל $x^2 - 2 \le -1$ ולכן

$$f(x^2-2) = -(x^2-2)$$

ולכן בתחום זה אי השיוויון נראה כך

$$x^2 - x^2 + 2 \ge x^2$$

$$2 \ge x^2$$

מתקיים בכל התחום שהרי $x^2 \le 1$.

סיכום ביניים: אי השיוויון מתקיים לכל $x \ge 0$

כעת יהי $x < 0$ אזי $-x > 0$ ולכן אי השיוויון מתקיים עבור $-x$

כלומר

$$f((-x)^2) + f((-x)^2 - 2) \ge (-x)^2$$

כיוון שראינו שאי השיוויון מתקיים לכל החיוביים.

אבל ביטוי זה שקול לחלוטין לביטוי שמתקבל מהצבת x ישירות:

$$f(x^2) + f(x^2-2) \ge x^2$$

2. מצאו את כל הפתרונות למשוואה $z^6 = (1+i)^2$

$$1 + i = \sqrt{2} cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

ולכן

$$(1+i)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 cis\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 2cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

לאחר שעברנו לצורה הקוטבית כמעט לא נותר מה לעשות!

$$z^6 = 2\ cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

6 הפתרונות השונים למשוואה הם

$$z_k = \sqrt[6]{2} cis\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{6}\right)$$

$$k = 0,1,2,3,4,5$$

3. מצאו משוואת מישור העובר בנקודות $(1,0,1),(1,1,0)$ ולא עובר בנקודה $(1,1,1)$.

אנחנו בעצם רוצים למצוא A,B,C,D כך ש

$$Ax+By+Cz=D$$

הוא מישור שעובר בשתי הנקודות הראשונות ולא בנקודה השנייה

כלומר רוצים את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} A+B=D \\ A+C=D \\ A+B+C\neq D \end{cases}$$

נתחיל לנחש

$$D=0$$

מכאן אפשר לראות כי נובע ש

$$B=C$$

$$A=-B$$

נבחר $B=1$ והכל עובד!

$$-x+y+z=0$$

הצלחנו!

4. הוכיחו באינדוקציה כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

בדיקה:

עבור $n=1$ אכן

$$1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$$

יהי n עבורו הטענה נכונה כלומר נתון כי

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

צ"ל את הטענה ה$n+1$ כלומר צריך להוכיח כי

$$\sum_{k=1}^{n+1}k^2=\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

נפתח את צד שמאל

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 \overset{\text{הנחה}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

נעבוד על השיוויון הימני:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

נצמצם $n+1$

$$\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1 \overset{?}{=} \frac{(n+2)(2n+3)}{6}$$

נכפול ב6

$$n(2n+1) + 6n + 6 \overset{?}{=} (n+2)(2n+3)$$

נפתח סוגריים

$$2n^2 + n + 6n + 6 = 2n^2 + 3n + 4n + 6$$

נגיד תודה שזה הצליח.

5. פתרו את האינטגרל $\int x^3 e^{(x^2)} dx$

$$\underbrace{\int x^3 e^{(x^2)} dx}_{x^2 e^{(x^2)} x dx} = \left\{\begin{matrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \\ \frac{1}{2} dt = xdx \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\int te^t dt = \left\{\begin{matrix} f' = e^t & g = t \\ f = e^t & g' = 1 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(te^t - \int e^t dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(te^t - e^t) + C = \frac{1}{2}\left(x^2 e^{x^2} - e^{x^2}\right) + C$$

6. <u>הגדרה:</u> שני וקטורים במרחב $v, u \in \mathbb{R}^3$ נקראים <u>בת"ל</u> אם

$$\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R}: \big(av + bu = (0,0,0)\big) \rightarrow (a = 0 \wedge b = 0)$$

א. נסחו תנאי השקול לכך ששני הוקטורים $v, u \in \mathbb{R}^3$ אינם בת"ל.

ב. קבעו **והוכיחו** לגבי כל אחד מהזוגות הבאים אם הם בת"ל או לא:

$(1,2,3),(0,1,2)$, $(1,1,-1),(-1,-1,1)$, $(1,0,2),(0,0,0)$

סעיף א':

v, u אינם בת"ל אם ורק אם קיימים $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש

$$av + bu = (0,0,0)$$

וגם

$$a \neq 0 \text{ או } b \neq 0$$

סעיף ב': כיוון שכאן אין לי אינטואיציה ננסה להוכיח עבור כל אחד מהזוגות ונראה מה יקרה.

נתחיל בזוג הראשון:

יהיו a,b כך ש

$$a(1,2,3)+b(0,1,2)=(0,0,0)$$

צריך להוכיח כי $a=b=0$

מהרכיב השמאלי נקבל

$$a\cdot 1+b\cdot 0=0$$

ולכן אכן $a=0$

מהרכיב האמצעי

$$2a+b=0$$

ולכן גם $b=0$ והזוג אכן בת"ל.

לזוג הבא:

יהיו a,b כך ש

$$a(1,1,-1)+b(-1,-1,1)=(0,0,0)$$

צ"ל כי $a=b=0$

מהרכיב השמאלי

$$a-b=0$$

ולכן $a=b$

מהרכיב האמצעי מקבלים אותו דבר בדיוק.

מהרכיב הימני מקבלים

$$-a+b=0$$

ושוב אותו דבר ולא הצלחנו להוכיח ש $a=b=0$.

זה רומז לכך שזו הפרכה, אבל זו אינה הפרכה.

חוסר היכולת שלנו להצליח להוכיח משהו, אינו מהווה הוכחה לכך שהוא שגוי.

נוכיח כי הזוג אינו בת"ל

נבחר $a=b=1$ ואכן

$$a(1,1,-1)+b(-1,-1,1)=(0,0,0)$$

וכן $a,b\neq 0$

נעבור לזוג השלישי

יהיו $a,b \in \mathbb{R}$ כך ש

$$a(1,0,2) + b(0,0,0) = (0,0,0)$$

צריך להוכיח $a = b = 0$.

למעשה אם אבחר $a = 0$ ואילו $b = 1$ המשוואה תתקיים וכן $b \neq 0$ ולכן הוכחנו שהוקטורים אינם בת"ל.

7. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

א. לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים אם $A \in B$ וגם $B \subseteq C$ אזי $C \setminus A \neq C$.

ב. לכל שתי קבוצות A,B מתקיים $A = B \Leftrightarrow B \setminus (A \setminus B) = A \setminus (B \setminus A)$.

סעיף א' הפרכה:

נבחר $A = \emptyset$

$$B = \{\emptyset\} = C$$

ואז הנתונים מתקיים אבל

$$C \setminus A = C \setminus \emptyset = C$$

סעיף ב' הוכחה:

בכיוון הראשון נניח כי $A = B$ אזי

$$A \setminus B = \emptyset$$

ולכן

$$B \setminus (A \setminus B) = B \setminus \emptyset = B$$

באופן דומה

$$A \setminus (B \setminus A) = A$$

והרי $A = B$ ולכן הוכחנו כי

$$B \setminus (A \setminus B) = A \setminus (B \setminus A)$$

בכיוון השני, נניח כי

$$B \setminus (A \setminus B) = A \setminus (B \setminus A)$$

וצריך להוכיח כי $A = B$

נוכיח כי $A \subseteq B$ וההכלה השנייה דומה.

יהי $a \in A$ צריך להוכיח כי $a \in B$

כיוון ש $a \in A$ אזי $a \notin B \setminus A$

כיוון ש $a \notin B \setminus A$ וכן $a \in A$ נובע כי $a \in A \setminus (B \setminus A)$

ולכן לפי הנתון

$$B \setminus (A \setminus B) = A \setminus (B \setminus A)$$

נובע כי

$$a \in B \setminus (A \setminus B)$$

ולכן בפרט

$$a \in B$$