רציפות במידה שווה

הגדרה

יהיו X,Y מרחבים מטריים. תהי $f:X\to Y$. נאמר שf רציפה במידה שווה על X אם לכל $\epsilon>0$ נתון, קיים $\delta>0$ (התלוי רק בϵ) כך ש $d_Y\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)<\epsilon$ לכל שתי נקודות $x,y\in X$ שעבורן $d_X\left(x,y\right)<\delta$

משפט

פונקציה רציפה על מ"מ קומפקטי היא רציפה במ"ש עליו.

הוכחה

נתון X מ"מ קומפקטי וY מ"מ מטרי כלשהו, ו$f:X\to Y$ רציפה. צל"ה: f רציפה במ"ש על X.

יהי $\epsilon>0$ נתון. תהי x נקודה כלשהי בX. כיוון שf רציפה בנק' x, קיים $\delta_x>0$ כך ש- $d_Y\left(f\left(y\right),f\left(x\right)\right)<\frac{\epsilon}{2}$ (*) כאשר $y\in X$ מקיים $d_X\left(y,x\right)<\delta_x$.

$\left\{B\left(x,\frac{\delta_x}{2}\right)\right\}_{x\in X}$ הוא כיסוי פתוח של X. מכיוון שX קומפקטי, קיים תת כיסוי סופי, ז"א קיימים $x_1,...x_n$ כך ש $X\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}B\left(x_k,\frac{\delta_{x_n}}{2}\right)$ (1).

נגדיר: $\delta\doteqdot\min_{1\le k\le n}\frac{\delta_{x_k}}{2}$.

נניח ש$x,y\ni X$. כיוון ש$x\in X$, לפי (1) קיים k ($1\le k\le n$) כך ש $x\in B\left(x_k,\frac{\delta_{x_k}}{2}\right)$

$$d_X\left(y,x_k\right)\le d_X\left(y,x\right)+d_X\left(x,x_k\right)<\delta_{x_k}$$

לפי (*) $d_Y\left(f\left(y\right),f\left(x_k\right)\right)<\frac{\epsilon}{2}$ (2). מאידך $d_X\left(x,x_k\right)<\frac{\delta_{x_k}}{2}<\delta_{x_k}$, ולכן, לפי (*), $d_Y\left(f\left(x\right),f\left(x_k\right)\right)<\frac{\epsilon}{2}$. לפי א"ש המשולש ב$Y$:

$$d\left(f\left(y\right),f\left(x\right)\right)\le d_Y\left(f\left(y\right),f\left(x_k\right)\right)+d_Y\left(f\left(x_k\right),f\left(x\right)\right)$$

ולפי (2), כאשר $d_X\left(y,x\right)<\delta$, זה קטן מ$\epsilon$. מש"ל.

קשר בין רציפות לקשירות.

משפט

יהיו X,Y מרחבים מטריים, ותהי $f:X\to Y$ פונקציה רציפה. אזי f מעתיקה קבוצות קשירות בX על קבוצות קשירות בY. (דהיינו: אם $E\subseteq X$ קשירה, אזי $f\left(E\right)$

קשירה(בY).

הוכחה

נתון $E \subseteq X$ קשירה, ו$f : X \to Y$ רציפה.

צל"ה $f(E)$ קשירה.

נניח ש$f(E)$ לא קשירה. ז"א קיימת קבוצות פתוחות, זרות, A, B הפוגשות את $f(E)$, כל ש$f(E) \subseteq A \cup B$.

$$E \subseteq f^{-1}(f(E)) \subseteq f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$f^{-1}(A)$ ו$f^{-1}(B)$ קבוצות פתוחות כי f רציפה וA, B פתוחות(משפט!)

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

כלומר: הקבוצות הפתוחות הנ"ל זרות.

$$a \in A \cap f(E) \Rightarrow a = f(a')$$

$$b \in B \cap f(E) \Rightarrow b = f(b')$$

$$a', b' \in E$$

$$a' \in f^{-1}(A)\,(\cap E)$$

$$b' = f^{-1}(B)\,(\cap E)$$

דהיינו הקבוצות $f^{-1}(A)$ ו$f^{-1}(B)$ פוגשות את E. קיבלנו שE לא קשירה. סתירה.

על $\mathbb{R}$

משפט

קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}$ היא קשירה אם"ם מתקיים התנאי הבא:

$$(*)\ \boxed{a, b \in E \Rightarrow [a, b] \subseteq E}$$

(לכן הקבוצות הקשירות ב$\mathbb{R}$ הן כדלקמן: $\emptyset$, $\mathbb{R}$, קרנות, וקטעים(סגורים, חצי סגור-ים, פתוחים)

הוכחה

תהי $E \subseteq \mathbb{R}$ קשירה. נניח ש$a,b \in E$, אבל $[a,b] \nsubseteq E$. קיים לכן $c \in [a,b]$, $c \notin E$.
$c \neq a,b$ כי $a,b \in E$ ו$c \notin E$. לכן $c \in (a,b)$.

נסתכל על הקבוצות $(-\infty,c),(c,\infty)$ - קב' פתוחות, זרות, ו$E \subseteq (-\infty,c) \cup (c,\infty)$ (שכן $c \notin E$).

$a \in E \cap (-\infty,c) \neq \emptyset$, $b \in E \cap (c,\infty) \neq \emptyset$

לכן E לא קשירה. סתירה.

הוכחנו שהתנאי (*) הוא הכרחי לקשירות של E.

נניח שE לא קשירה. קיימות קבוצות פתוחות זרות A,B, הפוגשות את E, כך ש$E \subseteq A \cup B$

$a \in A \cap E \neq \emptyset$, $b \in B \cap E \neq \emptyset$ (בחירה!). לפי (*) $[a,b] \subseteq E$ (**)

$A \cap [a,b] \neq \emptyset$ וחסומה (ע"י b). לכן קיים סופרימום של הקבוצה. $\boxed{c \doteqdot \sup A \cap [a,b]}$

כיוון ש$b \in B$ וB פתוחה קיים $r > 0$ כך ש$a < b - r$ ו$(b-r,b] \subseteq B$.

אם $(b \geq)\, t > b - r$, אזי $t \in B$, ולכן אברי $A \cap [a,b]$ קטנים או שווים ל$b - r$, ולכן $c \leq b - r < b$

שיקול דומה, עם היפוך אי השוויוניות, מראה ש$a < c$ (מנצלים את הנתון שA פתוחה).

אם $c \in A$, אזי כיוון שA פתוחה קיים $s > 0$ כך ש$(c,c+s] \subseteq A$ ו$c+s < b$ (אפשרי כי $c < b$).

$c \in (a,b) \cap A$, $(c,c+s] \in A \cap [a,b]$ ולכן $\sup A \cap [a,b] \geq c+s > c$

כלומר $c \notin A$, ושיקול דומה מראה ש$c \notin B$. לכן $c \notin E$ (כי $E \subseteq A \cup B$) אבל $c \in (a,b)$. סתירה ל(**)

הגדרה

יהי X מרחב מטרי כלשהו. מסילה בX היא תמונה של קטע $[a,b]$ ע"י פונקציה רציפה $f : [a,b] \to X$.

$f(a) \in X$ נקודת ההתחלה

$f(b) \in X$ נקודת הסיום

אם נתונה מסילה בטווח של פונקציה רציפה f על $[a,b]$, אפשר לתאר את אותה המסילה כטווח של פונקציה רציפה על הקטע $[0,1]$.

$$[0,1] \xrightarrow{h} a + t(b-a) \xrightarrow{f} X$$

t פרמטר של המסילה.

לפי משפט קודם, מסילה (בכל מ"מ) היא קבוצה קשירה:

$[0,1]$ קבוצה קשירה על $\mathbb{R}$. המסילה היא הקבוצה $f([0,1])$, תמונת הקבוצה הקשירה הנ"ל ע"י פונקציה רציפה, ולכן היא קבוצה קשירה בX.

הגדרה

קבוצה E במ"מ X נקראת קשירה מסילתית אם לכל שתי נקודות a, b בE קיימת מסילה γ שנק' התחלתה היא a ונק' סיומה היא b כך ש$\gamma \subseteq E$

ראינו משפט

אם E היא קבוצה שעבורה כל שתי נקודות p, q מוכלת בקבוצה חלקית קשירה $A_{p,q} \subseteq E$, אזי E קשירה.

על כן: תוצאה

בכל מ"מ, קבוצות קשירות מסילתיות הן קשירות.
עבור E קבוצה פתוחה ב$\mathbb{R}^k$, ההפך גם נכון.