# פתרון שיעורי בית 7 - תתי חבורות נורמליות ומשפט האיזו' הראשון

1. תהא $G$ חבורה ו $H \trianglelefteq G$ תת חבורה נורמלית. הוכיחו/הפריכו

   (א) אם $G$ ציקלית גם $G/H$ ציקלית.
   פתרון: יהא $g \in G$ יוצר אזי $gH \in G/H$ יוצר. הוכחה: יהא $g'H \in G/H$ לפי הגדרת $g$ קיים $n$ כך ש $g^n = g'$ ואז

   $$(gH)^n = g^n H = g' H$$

   (ב) אם $G/H$ ציקלית גם $G$ ציקלית.
   פתרון: ניקח חבורה $G$ שאינה חילופית (ולכן לא ציקלית). נגדיר $H = G$ תת חבורה נורמלית. אזי $G/H$ עם איבר יחיד ולכן ציקלית אבל החבורה $G$ אינה ציקלית.

2. הוכיחו/הפירכו:

   (א) תהא $G$ חבורה ו $N, K \trianglelefteq G$ אזי $N \cap K \trianglelefteq G$.
   פתרון: הוכחה: לכל $x \in N \cap K$ ולכל $g \in G$ צריך להוכיח כי $g^{-1}xg \in N \cap K$.
   אכן, אם $x \in N \cap K$ אזי $x \in N$ וגם $x \in K$ ולכן לכל $g \in G$ מתקיים $g^{-1}xg \in N$ וגם $g^{-1}xg \in K$ ולכן גם

   $$g^{-1}xg \in N \cap K$$

   כנדרש.

   (ב) תהא $G$ חבורה ו $N, K \leq G$ כך ש $K \trianglelefteq G$ וגם $N \trianglelefteq K$ אזי $K \trianglelefteq G$.
   פתרון: הפרכה: עבור $G = S_4$ מתקיים כי

   $$K = \{id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$$

   חבורה נורמלית ב $S_4$, וגם $N = \{id, (1,2)(3,4)\}$ נורמלית ב $K$ כי $|K/N| = \frac{|K|}{|N|} = \frac{4}{2} = 2$.
   אבל $N$ אינה נורמלית ב $G$ כי עבור $g = (1,3) \in G, (1,2)(3,4) \in N$ מתקיים כי

   $$g^{-1}(1,2)(3,4)g = (3,2)(1,4) \notin N$$

3. תהא $G$ חבורה ו $N,K\trianglelefteq G$ שתי תתי חבורה נורמליות המקיימות $N\cap K=\{e\}$.
הוכיחו כי

$$\forall x\in N,y\in K:\ xy=yx$$

[הדרכה: התבוננו ב $x^{-1}y^{-1}xy$]
פתרון: יהא $x\in N,y\in K$. מהגדרת $N$ חבורה נורמאלית נקבל כי

$$y^{-1}xy\in N$$

ומסגירות בחבורה נקבל כי גם

$$x^{-1}y^{-1}xy\in N$$

באופן דומה, מנורמליות של $K$ נקבל כי

$$x^{-1}y^{-1}x\in K$$

ועם סגירות

$$x^{-1}y^{-1}xy\in K$$

ולכן

$$x^{-1}y^{-1}xy\in K\cap N=\{e\}$$

ולכן

$$x^{-1}y^{-1}xy=e$$

שזה אומר

$$xy=yx$$

4. תהי $G$ חבורה, $C(G)$ הוא מרכז החבורה. הוכיחו: $C(G)\trianglelefteq G$.
פתרון:

יהיו $g\in G,h\in C(G)$, אזי $ghg^{-1}=hgg^{-1}=h\in C(G)$, כאשר המעבר הראשון נובע מכך ש־ $h\in C(G)$, ולכן מתחלף עם כל $g\in G$.

הערה למתעניינים: בתרגיל 5 ראיתם את חבורת האוטומורפיזמים $Aut(G)$, ותת חבורה של הומומורפיזים של הצמדות. בהמשך לתרגיל שם נקבל $G/C(G)$ איזו' לאוסף הומומורפיזמי ההצמדות.

5. נתון: $H_2\trianglelefteq G_2$ וגם $H_1\trianglelefteq G_1$ . הוכיחו:

(א) $(H_1\times H_2)\trianglelefteq(G_1\times G_2)$
פתרון: יהא $(g_1,g_2)\in G_1\times G_2$ ו $(h_1,h_2)\in H_1\times H_2$. צריך להוכיח כי

$$(g_1,g_2)(h_1,h_2)(g_1,g_2)^{-1}\in H_1\times H_2$$

אכן, לפי הגדרת חבורת המכפלה $G_1 \times G_2$

$$(g_1,g_2)(h_1,h_2)(g_1,g_2)^{-1} = (g_1,g_2)(h_1,h_2)\left(g_1^{-1},g_2^{-1}\right) = \left(g_1h_1g_1^{-1}, g_2h_2g_2^{-1}\right)$$

כיוון ש $H_1$ נורמלית נקבל כי $g_1h_1g_1^{-1} \in H_1$ ובגלל ש $H_2$ נורמלית נקבל כי $g_2h_2g_2^{-1} \in H_2$ ולכן

$$\left(g_1h_1g_1^{-1}, g_2h_2g_2^{-1}\right) \in H_1 \times H_2$$

(ב) $(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \cong (G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$

פתרון:

לפני שניכנס לפתרון עצמו, נזכיר כאן את העיקרון באופן כללי, כאשר נדרשים להוכיח איזו' בין קבוצות: משפט האיזו הראשון אומר שאם $G_1, G_2$ חבורות, ו־ $\varphi : G_1 \to G_2$ הומומורפיזם, אז מתקיים: ${}^{G_1}/_{ker(\varphi)} \cong Im(\varphi)$. לכן, בהינתן תת־חבורה נורמלית $H \trianglelefteq G_1$ מחפשים הומ' על $\varphi : G_1 \to G_2$ כך שהגרעין יהיה $H$, ואז מקבלים ${}^{G_1}/_H \cong G_2$.

ועכשיו אצלנו: נגדיר את הומורפיזים ההטלה

$$\phi : G_1 \times G_2 \to (G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$$

ע"י

$$(g_1,g_2) \mapsto (g_1H_1, g_2H_2)$$

זהו הומו' על (בדקו!) נרצה להשתמש במשפט האיזו' הראשון. קודם נחשב את הגרעין של $\phi$

$$\begin{aligned}\ker\phi &= \{(g_1,g_2) \in G_1 \times G_2 : \phi((g_1,g_2)) = 0\} \\ &= \{(g_1,g_2) \in G_1 \times G_2 : (g_1H_1, g_2H_2) = 0\} \\ (1) &= \{(g_1,g_2) \in G_1 \times G_2 : g_1 \in H_1, g_2 \in H_2\} = H_1 \times H_2\end{aligned}$$

(המעבר $(1)$ נובע מכך ש $0$ בחבורה זאת היא $(H_1,H_2)$ ולכן אם $(g_1H_1, g_2H_2) = (H_1,H_2)$ אז $g_i \in H_i$) לפי משפט האיזו' הראשון נקבל את המבוקש.

6. תהא $G$ חבורה חילופית. נגדיר $D = \{(g,g) : g \in G\} \subseteq G \times G$. הוכיחו כי זוהי תת חבורה נומאלית של $G \times G$ והראו כי

$$^{G\times G}/_D \cong G$$

פתרון: טענה $D$ היא תת חבורה. הוכחה $(e,e) \in D$ לפי הגדרה ולכן הנטרלי שייך ל $D$. אם $(g_1,g_1),(g_2,g_2) \in D$ אזי גם הכפל שלהם $(g_1g_2, g_1g_2) \in D$. אם $(g,g) \in D$ אזי גם ההפוכי שלו $\left(g^{-1},g^{-1}\right) \in D$. ולכן $D$ תת חבורה.

טענה: היא גם נורמאלית. הוכחה: בחבורה חילופית, כל תת חבורה היא נורמלית.

כעת נגדיר

$$\phi : G \times G \to G$$

ע"י

$$(x, y) \to xy^{-1}$$

זהו הומומורפיזים. הוכחה:

$$\phi\left(\left(x,y\right)\left(z,w\right)\right) = \phi\left(\left(xz,yw\right)\right) = xz\left(yw\right)^{-1} = xzw^{-1}y^{-1} = xy^{-1}zw^{-1} = \phi\left(\left(x,y\right)\right)\phi\left(\left(z,w\right)\right)$$

בנוסף, הוא על כי לכל $g \in G$ ניקח את $(g, e)$ כמקור.

כעת נחשב את הגרעין:

$$\ker\phi = \{(x,y) \in G \times G : \ \phi(x,y) = e\} = \left\{(x,y) \in G \times G : \ xy^{-1} = e\right\} = \{(x,y) \in G \times G : \ x = y\} = D$$

לפי משפט האיזו' הראשון נקבל את המבוקש.

7. תהא $G_1, G_2$ שתי חבורות סופיות עם סדרים זרים (כלומר $\gcd(|G_1|, |G_2|) = 1$).
הוכיחו כי קיים הומו' אחד $\phi : G_1 \to G_2$[רמז: חישבו על התמונה $\phi(G_1)$]
פתרון: יהא $\phi : G_1 \to G_2$ הומו'. אזי התמונה $H = Im(\phi) \leq G_2$ היא תת חבורה של $G_2$ ולכן $\frac{|G_2|}{|H|} \in \mathbb{Z}$ לפי משפט לגרנז'. מצד שני לפי משפט האיזו' מתקיים כי

$$G_1/\ker\phi \cong H = Im(\phi)$$

אזי

$$\frac{|G_1|}{|\ker\phi|} = |H|$$

ואז

$$\frac{|G_1|}{|H|} = |\ker\phi| \in \mathbb{Z}$$

כלומר $|H|$ מחלק גם את $|G_1|$וגם את $|G_2|$. כיוון שאלו מספרים זרים נקבל כי $|H| = 1$ ולכן $H = \{e_{G_2}\}$. אם התמונה של ההמור' זה רק האיבר הנטרלי של $G_2$אזי מדובר בהומו' הטריאלי (ששולח כל איבר ב $G_1$ לנטרלי של $G_2$).

8. יהא $n \in \mathbb{Z}$ נסמן $H = \langle(n,n,n,n)\rangle \leq \mathbb{Z}^4$. הוכיחו כי $\left[\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right] \cong \left[\mathbb{Z}^4/H\right]$ ($\mathbb{Z}^4$ חילופית, ולכן כל תת־חבורה נורמאלית).
פתרון: נגדיר פונקציה $\phi : \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ע"י

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 - x_2, x_1 - x_3, x_1 - x_4, [x_1])$$

כאשר $[x_1] = x_1 + n\mathbb{Z}$. נוכיח כי $\phi$ הומומורפיזם:

$$\begin{aligned}
&\phi\left((x_1,x_2,x_3,x_4)+(y_1,y_2,y_3,y_4)\right)\\
=&\phi\left((x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,x_4+y_4)\right)\\
=&\left((x_1+y_1)-(x_2+y_2),(x_1+y_1)-(x_3+y_3),(x_1+y_1)-(x_4+y_4),[x_1+y_1]\right)\\
=&\left((x_1-x_2)+(y_1-y_2),(x_1-x_3)+(y_1-y_3),(x_1-x_4)+(y_1-y_4),[x_1]+[y_1]\right)\\
=&\left(x_1-x_2,x_1-x_3,x_1-x_4,[x_1]\right)+\left(y_1-y_2,y_1-y_3,y_1-y_4,[y_1]\right)\\
=&\phi\left((x_1,x_2,x_3,x_4)\right)+\phi\left((y_1,y_2,y_3,y_4)\right)
\end{aligned}$$

בנוסף $\phi$ על כי לכל $(a,b,c,[x]) \in \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ מתקיים כי

$$\phi\left((x,x-a,x-b,x-c)\right)=\left(x-(x-a),x-(x-b),x-(x-c),[x]\right)=(a,b,c,[x])$$

ולכן $(x,x-a,x-b,x-c)$ הוא מקור ל $(a,b,c,[x])$. לפי משפט האיזומורפיזם הראשון מתקיים כי $\mathbb{Z}^4/\ker\phi \cong \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . נחשב את הגרעין

$$\begin{aligned}
\ker\phi &= \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{Z}^4 \middle|\, \phi\left((x_1,x_2,x_3,x_4)\right)=(0,0,0,0)\right\}\\
&= \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{Z}^4 \middle|\, (x_1-x_2,x_1-x_3,x_1-x_4,[x_1])=(0,0,0,0)\right\}\\
&= \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{Z}^4 \middle|\, [x_1=x_2=x_3=x_4]\wedge[x_1\in n\mathbb{Z}]\right\}\\
&= \left\{(x,x,x,x)\in\mathbb{Z}^4 \middle|\, x\in n\mathbb{Z}\right\}\\
&= \left\{(nk,nk,nk,nk)\in\mathbb{Z}^4 \middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}\\
&= \left\{k\,(n,n,n,n)\in\mathbb{Z}^4 \middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}=\langle(n,n,n,n)\rangle = H
\end{aligned}$$

ולכן

$$\mathbb{Z}^4/H \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

כנדרש.