שיעורי בית 1

.

1. הצג את התמורות הבאות באמצעות מחזורים זרים.

(א) $$a=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

(ב) $$b=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&6&5&4&3\end{pmatrix}$$

פתרון: $a=(1\,6)\,(2\,5)\,(3\,4),b=(1\,2)\,(4\,5)\,(3\,6)$

2. חשבו: $a^2\ ,b^2,bab^{-1},ab$

פתרון: מכיוון שהצלחנו לפרק אותם למחזורים זרים מאורך שניים יתקיים $b=b^{-1}$ $a=a^{-1}$.

ואז : $a^2=b^2=e$ $bab^{-1}=bab=(1\,4)\,(5\,6)\,(3\,2)$ $ab=(1\,5\,3)\,(2\,6\,4)$

3. תהא $\sigma\in S_n$. ותהא $\sigma=\tau_1\cdots\tau_m$ ההצגה שלה כמכפלה של מחזורים זרים. הוכח כי

(א) $\sigma^{-1}=\tau_1^{-1}\cdots\tau_m^{-1}$

(ב) $\sigma^k=\tau_1^k\cdots\tau_m^k$ לכל k טבעי.

פתרון: מתקיים כי $\sigma^{-1}=\tau_m^{-1}\cdots\tau_1^{-1}$ כי $\tau_1\cdots\tau_m\tau_m^{-1}\cdots\tau_1^{-1}=id$. בנוסף, המספרים המופיעים ב τ_i הם אותם מספרים המופיעים ב τ_i^{-1} ולכן המחזורים $\tau_m^{-1},\ldots,\tau_1^{-1}$ זרים ולכן מתחלפים. ומכאן נקבל

$$\sigma^{-1}=\tau_m^{-1}\cdots\tau_1^{-1}=\sigma^{-1}=\tau_1^{-1}\cdots\tau_m^{-1}$$

בשיקול דומה, כיוון ש $\tau_1,\ldots,\tau_m$ זרים הם מתחלפים ולכן אפשר לקבץ אותם. כלומר

$$\sigma^k=(\tau_1\cdots\tau_m)\,(\tau_1\cdots\tau_m)\cdots(\tau_1\cdots\tau_m)=(\tau_1\cdots\tau_1)\,(\tau_2\cdots\tau_2)\cdots(\tau_m\cdots\tau_m)=\tau_1^k\cdots\tau_m^k$$

(ג) הראה שהשיוויוניות לעיל לא מתקיימים בהכרח בחבורה כללית. כלומר: תהא G חבורה. ויהא $g=x_1\cdots x_m\in G$ מצא דוגמא המקיימות

i. $g^{-1}\neq x_1^{-1}\cdots x_m^{-1}$

ii. $g^k \neq x_1^k \cdots x_m^k$

פתרון: נתסכל על $(1,2,3) = (1,2)(2,3) \in S_3$ מתקיים

$$(1,2,3)^{-1} = (3,2,1) \neq (1,2)^{-1}(2,3)^{-1} = (1,2)(2,3) = (1,2,3)$$

וגם

$$(1,2,3)^2 = (1,3,2) \neq (1,2)^2(2,3)^2 = id$$

(ד) מצא את התנאים ששיוויונות אלו כן יתקיימו, כלומר שכן מתקיים

i. $g^{-1} = x_1^{-1} \cdots x_m^{-1}$

ii. $g^k = x_1^k \cdots x_m^k$

פתרון: מספיק שהאברים $x_1, x_2, \ldots x_m$ יתחלפו זה עם זה.

עבור הסעיף השני, זה מיידי.

עבור הסעיף הראשון, נראה כי אם $x_1, x_2, \ldots x_m$ מתחלפים זה עם זה אז גם ההופכים. אכן אם $x_i x_j = x_j x_i$ אז אם נהפוך את שני הצדדיים נקבל

$$x_j^{-1} x_i^{-1} = (x_i x_j)^{-1} = (x_j x_i)^{-1} = x_i^{-1} x_j^{-1}$$

.4

(א) הוכיחו כי עבור מחזור $(i_1, \ldots, i_m) \in S_n$ מתקיים כי

$$(i_1, \ldots, i_m) = (i_1, i_2)(i_2 i_3) \ldots (i_{m-1} i_m)$$

פתרון: נראה ששתי הפונקציות משני צדדי המשוואה שולחות כל $x \in \{1, \ldots, n\}$ לאותו מקום. אכן, יהא $x \in \{1, \ldots, n\}$.

אם $x = i_k$ (לאיזה שהוא $k < m$) אזי

$$(i_1, \ldots, i_m)[i_k] = i_{k+1} = (i_k, i_{k+1})[x] = (i_1, i_2)(i_2 i_3) \ldots (i_{m-1} i_m)[x]$$

כי החילופים זרים (נובע מכך ש $(i_1, \ldots, i_m)$ מחזור).

אם $x = i_m$ אזי

$$(i_1, \ldots, i_m)[i_m] = i_1 = (i_1, i_2)[i_2] = (i_1, i_2)(i_2 i_3)[i_3] = \ldots = (i_1, i_2)(i_2 i_3) \ldots (i_{m-1} i_m)[i_m]$$

אחרת $x \neq i_k$ לכל k ואז

$$(i_1, \ldots, i_m)[x] = x = (i_1, i_2)(i_2 i_3) \ldots (i_{m-1} i_m)[x]$$

כי x מופיע במחזור מאורך 1

(ב) הסיקו כי כל תמורה $\sigma \in S_n$ ניתנת להצגה כמכפלה של חילופים. (הצגה זאת אינה יחידה. למשל $(3,4)\,(1,2)\,(3,4) = (1,2)$)

פתרון: תהא σ תמורה. אזי היא ניתנת להצגה כמכפלה של מחזורים זרים $\sigma = \Pi_{i=1}^{m}\sigma_i$ ולכל i המחזור $\sigma_i = \Pi_{j=1}^{m_i}\tau_{i,j}$ ניתן להצגה כמכפלה של חילופים לפי סעיף קודם ולכן גם

$$\sigma = \Pi_{i=1}^{m}\sigma_i = \Pi_{i=1}^{m}\Pi_{j=1}^{m_i}\tau_{i,j}$$

ניתנת להצגה כמכפלה של חילופים.

5. הגדרה: תהא $\sigma \in S_n$ נגדיר $t = \#\left\{(i,j):\ i<j, \sigma(j)<\sigma(i)\right\}$ להיות מספר היפוכי הסדר [אינדקסים (i,j) המקיימים כי $i<j$ וגם $\sigma(j)<\sigma(i)$ נקראים היפוך סדר. שימו לב כי בשאלה זו (i,j)זהו זוג סדור של האינדקסים i,j ולא תמורה]. עוד נגדיר את הסימן של σ להיות

$$sgn(\sigma) = (-1)^t$$

כלומר הסימן של σ הוא -1 בחזקת מספר היפוכי הסדר, כלומר אם מספר היפוכי הסדר הוא זוגי הסימן שווה 1 ואם מספר היפוכי הסדר הוא אי זוגי אזי הסימן שווה ל -1. למשל עבור $\sigma = (1,2,3)$ מתקיים כי הזוג הסדור$(1,3)$ הוא היפוך סדר כי $1<3$ וגם $\sigma(1)<\sigma(3)$. גם הזוג הסדור$(2,3)$ הוא היפוך סדר. שני אלו היפוכי הסדר היחידים ולכן $sgn(\sigma) = (-1)^2 = 1$. התמורות שהסימן שלהם שווה 1 נקראות תמורות זוגיות ואילו תמורות שהסימן שלהם שווה -1 נקראות תמורות אי זוגיות.

תהא $\sigma \in S_n$ תמורה ויהא $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ הצגה שלה כמכפלה של חילופים. הוכיחו כי מתקיים

$$sgn(\sigma) = (-1)^m$$

[למשל את $\sigma = (1,2,3)$ ניתן להציג כ $(1,2)\,(2,3)$כלומר כמפלה של 2 חילופים ואכן $sgn(\sigma) = (-1)^2$]

הדרכה: הוכיחו כי $sgn(\sigma_1\sigma_2) = sgn(\sigma_1)sgn(\sigma_2)$

ע"י האבחנה כי $\#\left\{(i,j):\ i<j, \sigma_1(j)<\sigma_1(i)\right\} = \#\left\{(\sigma_2(i),\sigma_2(j)):\ \sigma_2(i)<\sigma_2(j), \sigma_1(\sigma_2(j))<\sigma_1(\sigma_2(i))\right\}$

פתרון : נוכיח קודם כל כי $sgn(\sigma_1\sigma_2) = sgn(\sigma_1)sgn(\sigma_2)$.

נשים לב כי $\#\left\{(i,j):\ i<j, \sigma_1(j)<\sigma_1(i)\right\} = \#\left\{(\sigma_2(i),\sigma_2(j)):\ \sigma_2(i)<\sigma_2(j), \sigma_1(\sigma_2(j))<\sigma_1(\sigma_2(i))\right\}$ ע"י החלפת (i,j) ב $(\sigma(i),\sigma(j))$ [שימו לב שכיוון ש σ הפיכה, אכן הקבוצות שוות]. כעת נגדיר

$A = \left\{(i,j):\ i<j, \sigma_2(j)<\sigma_2(i)\right\}$ ואת $B = \left\{(\sigma_2(i),\sigma_2(j)):\ \sigma_2(i)<\sigma_2(j), \sigma_1(\sigma_2(j))<\sigma_1(\sigma_2(i))\right\}$

[עוד נגדיר $C = \left\{(i,j):\ i<j, \sigma_1(j)<\sigma_1(i)\right\}$ ונשים לב כי $(\sigma(i),\sigma(j)) \in B \iff (i,j) \in C$]

ומכאן ש $A^c = \left\{(i,j):\ i<j, \sigma_2(j)>\sigma_2(i)\right\}$ וגם $B^c = \left\{(\sigma_2(i),\sigma_2(j)):\ \sigma_2(i)<\sigma_2(j), \sigma_1(\sigma_2(j))>\sigma_1(\sigma_2(i))\right\}$. כעת ניגש להוכחה:

יהיו $(i,j) \in \left\{(i,j):\ i<j, \sigma_1\sigma_2(j)<\sigma_1\sigma_2(i)\right\}$ אזי $i<j, \sigma_1\sigma_2(j)<\sigma_1\sigma_2(i)$. כעת ישנם 2 אפשריות. אפשרות 1: $\sigma_2(j)<\sigma_2(i)$ ואפשרות 2:$\sigma_2(i)<\sigma_2(j)$.

באפשרות 1: נקבל כי $(i,j) \in A$ וגם $(\sigma_2(i),\sigma_2(j)) \in B^c$

באפשרות 2: נקבל כי $(i,j) \in A^c$ וגם $(\sigma_2(i),\sigma_2(j)) \in B$.

לחילופין אם אפשרות 1 מתקיימת $(i,j) \in A$ וגם $(\sigma_2(i),\sigma_2(j)) \in B^c$ או אפשרות 2 מתקיימת כי $(i,j) \in A^c$ וגם $(\sigma_2(i),\sigma_2(j)) \in B$ אזי $(i,j) \in \left\{(i,j):\ i<j, \sigma_1\sigma_2(j)<\sigma_1\sigma_2(i)\right\}$.

מסקנה :

$$\{(i,j):\ i<j,\sigma_1\sigma_2(j)<\sigma_1\sigma_2(i)\}=\{(i,j):\ (i,j)\in A\wedge(\sigma(i),\sigma(j))\in B^c\}\cup\{(i,j):\ (i,j)\in A^c\wedge(\sigma(i),\sigma(j))\in B\}=[A\cap C^c]\cup[A^c\cap C]$$

כעת מספיק להוכיח כי

$$\#\left[A\cup C\right]\cap\left[A^c\cup C^c\right]\equiv\#A+\#C$$

מודולו 2 (כלומר ששני צידי המשוואה זוגיים או ששניהם אי זוגיים).

$$\#\left[A\cup C\right]\cap\left[A^c\cup C^c\right]=\#\left[A\cup C\right]+\#\left[A^c\cup C^c\right]-\#\left[A\cup C\right]\cup\left[A^c\cup C^c\right]$$

$$=\#A+\#C-\#A\cap C+\#\left(A\cap C\right)^c-\#U\equiv\#A+\#C+\#A\cap C+\#\left(A\cap C\right)^c-\#U=\#A+\#U-\#U=\#A+\#C$$

לפני השלמת ההוכחה נציין שבאינדוקציה ניתן להוכיח כי $sgn\left(\Pi_{i=1}^m\sigma_i\right)=\Pi_i^m sgn(\sigma_i)$

ולהוכחת הטענה המרכזית: עבור חילוף $\tau=(i_1,i_2)$ מתקיים כי $sgn(\tau)=1$ ולכן אם $\sigma=\tau_1\cdots\tau_m$ הצגה של σ כמכפלה של חילופים מתקיים כי

$$sgn(\sigma)=sgn\left(\Pi_{i=1}^m\tau_i\right)=\Pi_i^m sgn(\tau_i)=\Pi_i^m(-1)=(-1)^m$$

6. עבור $\sigma\in S_n$ ומחזור $(i_1,i_2,\dots i_m)\in S_n$ הוכח כי מתקיים השיוויון הבא

$$\sigma\left(i_1,i_2,\dots i_m\right)\sigma^{-1}=\left(\sigma(i_1),\sigma(i_2),\dots,\sigma(i_m)\right)$$

למשל $\sigma=(1,2)$ מתקיים כי

$$\sigma\left(2,3,5,6\right)\sigma^{-1}=\left(1,3,5,6\right)$$

פתרון : ע"י הכפלה מימין ב σ ומשמאל ב σ^{-1} שקול להוכיח כי

$$\left(i_1,i_2,\dots i_m\right)=\sigma^{-1}\left(\sigma(i_1),\sigma(i_2),\dots,\sigma(i_m)\right)\sigma$$

יהא $x\in\{1,2,\dots,n\}$ צריך להוכיח כי שתי הפונקציות (משני צידי השיוויון) מעתיקות אותו לאותו מספר.

אם $x\in\{i_1,\dots i_m\}$ אזי $x=i_k$ כלשהוא ואז

$$\sigma^{-1}\left(\sigma(i_1),\sigma(i_2),\dots,\sigma(i_m)\right)\sigma(i_k)=\sigma^{-1}\left(\sigma(i_{k+1})\right)=i_{k+1}$$

(אם $k=m$ אז נחליף את $m+1$ ב־1)

ומצד שני

$$\left(i_1,i_2,\ldots i_m\right)\left(i_k\right)=i_{k+1}$$

ויש שיוון.

אם $x\notin\{i_1\ldots i_m\}$ אזי

$$\sigma^{-1}\left(\sigma(i_1),\sigma(i_2),\ldots,\sigma(i_m)\right)\sigma(x)=\sigma^{-1}\sigma(x)=x$$

התמורה $\left(\sigma(i_1),\sigma(i_2),\ldots,\sigma(i_m)\right)$ שולחת את $\sigma(x)$ לעצמו כי אחרת $\sigma(x)=\sigma(i_k)$ וכיוון שזוהי תמורה (בפרט חח"ע) זה גורר כי $x=i_k$ סתירה.

ומצד שני

$$\left(i_1,i_2,\ldots i_m\right)(x)=x$$

7. תרגיל מודרך: טענה־ קיימות $\sigma_1,\sigma_2\in S_n$ כך שכל $\sigma\in S_n$ ניתן להציג כמכפלה שלהם והופכיהם.
כלומר $\sigma=\prod\limits_{i=1}^{N}\tau_i$ כאשר לכל i מתקיים $\tau_i\in\left\{\sigma_1,\sigma_1^{-1},\sigma_2,\sigma_2^{-1}\right\}$.
אנחנו נעבוד עם $\sigma_2=(1,2)$, $\sigma_1=(1,2,3,\ldots,n)$.

(א) הראה כי כל חילוף מהצורה $(1,i)$ ניתן להציגו ע"י ע"י σ_1,σ_2 והופכיהן. (רמז: תרגיל 6 יכול להיות לעזר

פתרון : יהיה $(1,i)$ חילוף. מתקיים

$\tau=\sigma_2\sigma_1=(2,3\ldots,n)$ ואז $\tau^{i-2}(2)=i$ בנוסף $\tau^{i-2}(1)=1$.

נסמן $\tau'=\tau^{i-2}$ ואזי לפי תרגיל 6 מתקיים $(1,i)=(\tau'(1),\tau'(2))=\tau'\sigma_2\left(\tau'\right)^{-1}$.

(ב) הראה שכל חילוף (i,j) ניתן להביעו בעזרת $\{(1,k)\}_{k>2}$

פתרון : מתקיים כי $(i,j)=(1.i)\,(1,j)\,(1.i)$

(ג) הוכח את הטענה.

פתרון : כל $\sigma\in S_n$ ניתן להציגה כמכפלה של חילופים. לפי סעיפים קודמים:

כל חילוף נביע בעזרת מכפלה של שתי חילופים $(1,k)\,(1,k')$.

כל מכפלה כזאת נביע באמצעות $\tau'\sigma_2\left(\tau'\right)^{-1}$ שזה אכן מכפלה שמעורבים בה רק תמורות מתוך $\left\{\sigma_1,\sigma_1^{-1},\sigma_2,\sigma_2^{-1}\right\}$.