

## בוחר בדידה

19.7.2017 , כ"ה תמוז תשע"ז

מתרגלים: עדי בן צבי, אחיה בר-און, תמר בר-און, אלעד עטיא  
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- משך הבחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- ניקוד מקסמאלי: 110 נקודות

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

**בהצלחה!**

1. פרדיקט  $P$  מעל השלמים ייקרא "נחמד" אם הפסוק  $\exists a \in \mathbb{Z} : [P(a) \rightarrow P(a+1)]$  בעל ערך  $TRUE$ . הוכיחו או הפריכו: כל פרדיקט הוא נחמד.

2. לכל  $n \in \mathbb{N}$  נגדיר  $1 < n$ ,  $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ . אלו נקראים מספרי פיבונאצ'י. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  מתקיים:

$$\sum_{i=0}^n (F_i)^2 = F_n F_{n+1}$$

3. תהיינה  $A, B, C$  קבוצות. הוכיחו או הפריכו:

(א)  $A \Delta B \subseteq (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$

(ב)  $A \Delta B \supseteq (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$

4.

(א) תהא  $A$  קבוצה, ו  $R$  יחס שקילות עליה. נגדיר יחס  $S$  על  $R$  (כן, כן, גם  $R$  היא קבוצה) כך: לכל  $(a, b), (a', b') \in R$

$$(a, b) S (a', b') \iff aRa' \wedge bRb'$$

הוכיחו  $S$  יחס שקילות.

(ב) נגדיר יחס שקילות  $R$  על  $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  כך: לכל  $x, y \in \mathbb{Q}^\times$

$$xRy \iff \exists z \in \mathbb{Q}^\times : xy = z^2$$

i. הוכיחו כי  $R$  טרנזיטיבי (אין צורך להוכיח רפלקסיביות וסימטריות)

ii. נגדיר יחס  $S$  על  $R$  כמו בסעיף הקודם. מצאו מפורשות את מחלקת השקילות של  $\left[ \left(1, \frac{1}{4}\right) \right]_S$  ותנו 2 איברים במחלקת שקילות זאת.

☺ בהצלחה!