פרופ' ו. גולדשטיין
פרופ. א. פיינטוך
ד"ר. מודל
ד"ר.נ.גולקו

מדור בחינות

מבחן ב: חדו"א ל הנדסת חשמל/תקשורת./ ביורפואית/ פיזיקה

מס' הקורס: 201-1-9811

מס' הנבחן:______________

שנה: א' סמ': א מועד: א

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: 1 דף נוסחאות בגודל סטנדרטי,מחשבון עם

מסך קטן
ענה על 5 מתוך 6 שאלות.
כתוב התשובות מפורטות וברורות.
כל השאלות הן בעלות אותו משקל.
כל הסעיפים הן בעלי אותו משקל.

1. **א**) נתונה סדרה $\{x_n\}$ כך ש

$$\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\right)\left(\limsup_{n\to\infty}x_n\right)=1$$

הוכח ש $\{x_n\}$ מתכנסת.

ב) a מספר חיובי, $\{x_n\}$ מוגדרת ע" $x_0=0$ ו $x_{n+1}=a+x_n^2$ **לכל** $n\geq 0$. מצא את כל הערכים של a שעבורם $\lim_{n\to\infty}x_n$ קיים וחשב את הגבול (במונחים של a)

2. חקור את הפונקציה $y=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

3. חשב את הגבולות

$$\frac{6}{11}\ \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^3}{2x^3+\sin x-x}\ ,\qquad \lim_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}\quad e^2$$

4. נתונה f גזירה על $(-\infty,+\infty)$ המקיימת $f(0)=0$ וכך ש f' עולה בקטע $[0,\infty)$. אם g מוגדרת על $[0,\infty)$ ע"י $g(x)=\begin{cases}f'(0), & x=0\\ \frac{f(x)}{x} & x>0\end{cases}$
הוכח, ש g פונקציה עולה.

5. חשב $\int\frac{dx}{\sqrt{e^{3x}+1}}$, $\int_1^5\frac{|x^2-5x+6|}{x(x+1)(x+2)}dx$

0.378

6. חשב $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\sin t^2dt}{\int_0^{x^3}e^{t^2}dt}$, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{[\ln(n+k)-\ln n]}{n}$

(3) (ב) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)^3}{2x^3+\sin x - x} =$

בגלל שזה "0/0" נשתמש בלופיטל

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3(e^x-1)^2\cdot e^x}{6x^2+\cos x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3e^x(e^x-1)^2 + 3e^x\cdot e^x\cdot 2(e^x-1)}{12x-\sin x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)(3e^{2x}-3e^x+6e^{3x}\cancel{-6e^{2x}})}{12x-\sin x}$ $+6e^{2x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)(6e^{3x}-3e^{2x}-3e^x)}{12x-\sin x}$

הפונקציה רציפה בסביבת $x=0$ ולכן נציב פשוט את הערך

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x(6e^{3x}-3e^{2x}-3e^x)+(e^x-1)\cdot(18e^{3x}-6e^{2x}-3e^x)}{12-\cos x}$

08/10

$= \dfrac{e^0(6e^{3\cdot 0}-3e^{2\cdot 0}-3e^0)+\cancel{(e^0-1)(\dots)}}{12-\cos 0}$

$= \cancel{\dfrac{0}{11}} = \boxed{0}$

(3) (ג) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}} =$

הגבול הוא מסוג 1^∞ נשתמש ב-e

$= \lim\limits_{x\to 0} \left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{1}{x^2e^x}}\right)^{\frac{1}{x^2e^x}}\right]^{x^2e^x\cdot\frac{1}{1-\cos x}} =$

$\frac{1}{x^2e^x} \to \infty$

e^x פונקציה רציפה ולכן אפשר להכניס את הגבול פנימה

$= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2e^x}{1-\cos x}} = 1$

10/10

$\left[2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \cos(\alpha)\right.$:(נשתמש בנוסחה

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{x^2 e^x}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2 e^x}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot 4}$$

גבול מוכר

$\lim_{f(x)\to 0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)}$ $\boxed{1}$

בעזרת אריתמטיקה של גבולות ניתן להפריד את 2 הגבולות הללו

$$= e^{\lim_{x\to 0} 2\cdot e^x} = e^{2\cdot e^{0}} = \boxed{e^2}$$

פה רציפה בגבול
לכן ניתן להציב
את הערך

5 יט

$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{3x}+1}} =$

נמצא הצבה:

$\sqrt{e^{3x}+1} = t$

$e^{3x}+1 = t^2$

$e^{3x} = t^2 - 1$

$3e^{3x}\,dx = 2t\,dt \Rightarrow dx = \frac{2t\,dt}{3e^{3x}}$

$dx = \frac{2t\,dt}{3(t^2-1)}$

$= \int \frac{2\cancel{t}\,dt}{3(t^2-1)} \cdot \frac{1}{\cancel{t}} = \frac{2}{3}\int \frac{1}{(t-1)(t+1)}\,dt =$

נמצא פירוק אלגברי (מהיר):

$\frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right]$

נבדוק שזה אכן מתקיים (נימשתי את התוצאה):

$\frac{1}{2}\left[\frac{\cancel{t}+1-\cancel{t}+1}{(t-1)(t+1)}\right] = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}}{(t-1)(t+1)}\right) = \boxed{\frac{1}{(t-1)(t+1)}}$ ✓

$= \frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt$

$= \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t-1} - \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t+1}$

$= \frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{3}\ln|t+1| + C$

$= \boxed{\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C}$??

08/10

חסרה חזרה למשתנה

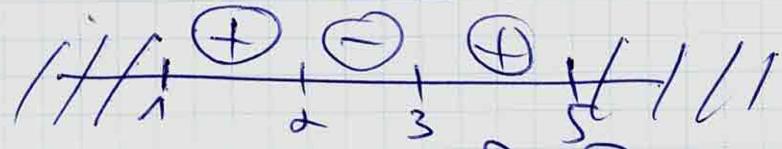
המקורי X !!!

ט.ט.

5. ב) $\int_1^5 \frac{|x^2-5x+6|}{x(x+1)(x+2)}\,dx$

יש ערך מוחלט באינטגרל - נבדוק בת. האינטגרציה מתי הפנים של הערך מוחלט חיובי ומתי שלילי:

$$x^2-5x+6=0$$
$$(x-2)(x-3)=0$$
$$\boxed{x_1=2 \quad x_2=3}$$



נפרק את האינטגרל לפי תחומים כך שערך מוחלט יהיה תמיד חיובי:

$$=\int_1^2 \frac{(x^2-5x+6)dx}{x(x+1)(x+2)}-\int_2^3 \frac{(x^2-5x+6)dx}{x(x+1)(x+2)}+\int_3^5 \frac{(x^2-5x+6)dx}{x(x+1)(x+2)}$$

~~נבצע פירוק אלגברי לכל שבר:~~

המעלה במכנה של השבר גבוהה מאשר במונה!
נבצע פירוק אלגברי לכל שבר:

$$\frac{x^2-5x+6}{x(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}=$$
$$=\frac{A(x+1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x+1)}{x(x+1)(x+2)}$$
$$=\frac{(A+B+C)x^2+(3A+2B+C)x+(2A)}{x(x+1)(x+2)}$$

נשווה מקדמי הפולינום במונה:

$$\left.\begin{aligned} A+B+C&=1\\ 3A+2B+C&=-5\\ 2A&=6\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{A=3}$$

$$\left.\begin{aligned} 3+B+C&=1 \\ 3\cdot 3+2B+C&=-5 \end{aligned}\right\}$$

$$-\left.\begin{aligned} B+\cancel{C}&=-2 \\ 2B+\cancel{C}&=-14 \end{aligned}\right\}$$

$-B$

$\cancel{-3B}=12$

$\boxed{B=-4} \Longrightarrow C=-2-B$

$C=-2-(-4)$

$\boxed{C=2}$

הפירוק האלגברי תקף לגבי כל האינטגרלים;
נזכור שכן שהאינטגרל מוגדר (כלומר זהים בתחומים
רק הגבולות שונים) ונציב גבולות של כל אחד
בנפרד:

$$\int_a^b \left(\frac{3}{x}+\frac{-4}{x+1}+\frac{2}{x+2}\right)dx$$

$$=3\int_a^b \frac{1}{x}\,dx-4\int_a^b \frac{dx}{x+1}+2\int \frac{dx}{x+2}$$

$$=\left(3\ln|x|-4\ln|x+1|+2\ln|x+2|\right)\Big|_a^b$$

$$=\left(\ln|x|^3-\ln(x+1)^4+\ln(x+2)^2\right)\Big|_a^b$$

כבר לא צריך ערך מוחלט כי החזקה זוגית

$$=\ln\frac{|x|^3(x+2)^2}{(x+1)^4}\Bigg|_a^b$$

נחזור כרגע לאינט' המקורי שבפתיחת השאלון
היה מורכב מ-3 אינט' ~~את~~ זהים בתחומים;
(שבפתרון של כל אחד מהם הגענו)

$$= \ln \frac{|x|^3 (x+2)^2}{(x+1)^4}\Bigg|_1^2 - \ln \frac{|x|^3 (x+2)^2}{(x+1)^4}\Bigg|_2^3 + $$

$$+ \ln \frac{|x|^3 (x+2)^2}{(x+1)^4}\Bigg|_3^5$$

$$= \left(\ln \frac{2^3 \cdot 4^2}{3^4} - \ln \frac{1^3 3^2}{2^4}\right) - \left(\ln \frac{3^3 5^2}{4^4} - \ln \frac{2^3 4^2}{3^4}\right) +$$

$$+ \left(\ln \frac{5^3 7^2}{6^4} - \ln \frac{3^3 5^2}{4^4}\right)$$

$$= \ln \frac{128}{81} - \ln \frac{9}{16} - \left(\ln \frac{675}{256} - \ln \frac{128}{81}\right) +$$

$$+ \ln \frac{6125}{1296} - \ln \frac{675}{256}$$

$$= 0.458 - (-0.575) - (0.97 - 0.458) +$$

$$+ 1.553 - 0.97$$

$$= \boxed{1.104}$$

$\frac{09}{10}$

(2) $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

ת. הגדרה:

$(x+1)^2 \neq 0$

$x+1 \neq 0$

$\boxed{x \neq -1}$ - ת. ההגדרה.

נבדוק א אסימפטוטות אנכיות על סמך ת.הגדרה:

$\lim_{x \to -1} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = \boxed{-\infty}$

מתקבל "מס'/0"

המס' 0-ל הוא שלילי בגבול

שם במכנה 3 2 והתקרבות

לכן מקבלים מס' מכל

לחו' $-\infty$ חיובים

הצבעים מ-2

קיימת אסימפטוטה אנכית עבור $\boxed{x=-1}$.

נבדוק נק' חיתוך עם הצירים:

$x=0$

$y = \frac{(-1)^3}{1^2} = \boxed{-1}$

$(0,-1)$

$y=0$

$0 = \frac{(x-1)^3}{\cancel{(x+1)^2}}$

$0 = x-1$

$\boxed{x=1}$

$(1,0)$

נק' חיתוך עם הצירים

נבדוק נק' קיצון + ת. עלייה/ירידה:

$f'(x) = \frac{3(x-1)^2(x+1)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(x+1)}(x-1)^3}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}}$

$= \frac{(x-1)^2[3x+3-2x+2]}{(x+1)^3} = \boxed{\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}}$

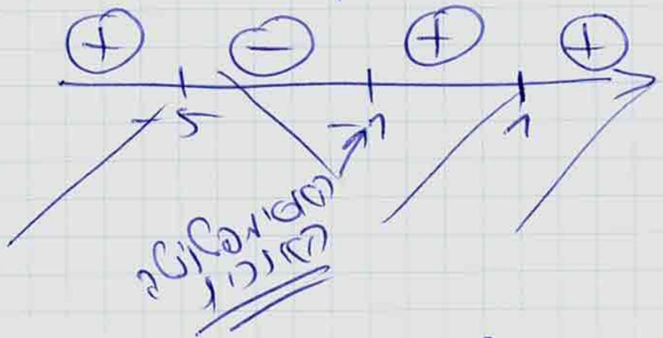
$f'(x)=0$

$$0=\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$$

$$0=(x+1)^2(x+5)$$

$$\boxed{x=+1 \;|\; -5}$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$$



קיבלנו ש- $x=1$ היא לא נק' קיצון ויש לנו
רק נק' קיצון אחת $x=-5$ (והיא מקס' על סמך ירידות ועליות פה)

$$f(-5)=\frac{(-5-1)^3}{(-5+1)^2}=\frac{(-6)^3}{(-4)^2}=\frac{-216}{16}=\boxed{-13.5}$$

$Max(-5, 13.5)$ — נק' מקס'

$\boxed{x<-5 \text{ או } x>-1\,,\ x\neq 1}$ — ת. עלייה

$\boxed{-5<x<-1}$ — ת. ירידה

נבדוק נק' פיתול + ת. קמירות/קעירות:

$$f''(x)=\frac{\left[2(x-1)(x+5)+(x-1)^2\cdot 1\right](x+1)^{\cancel{3}}-3\cancel{(x+1)^2}(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^{\cancel{6}\,4}}$$

$$=\frac{(x-1)\left[2x+10+x-1\right](x+1)-(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)\left[(3x+9)(x+1)-(x-1)(x+5)\right]}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)\left[3x^2+3x+9x+9-x^2-5x+x+5\right]}{(x+1)^4}$$

$$=\boxed{\frac{(x-1)(2x^2+8x+14)}{(x+1)^4}}$$

$f''(x)=0$

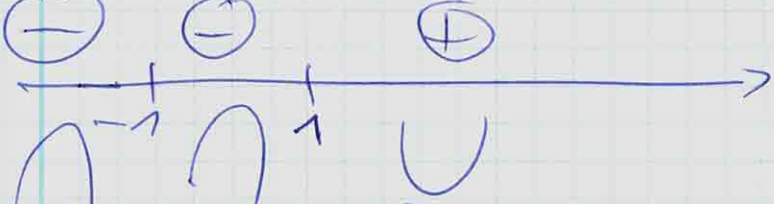
$$\frac{(x-1)(2x^2+8x+14)}{\cancel{(x+1)^4}}=0$$

$\boxed{x=1}$ $\quad 2x^2+8x+14=0$

$$x_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{64-4\cdot 2\cdot 14}}{4}$$

$$=\frac{-8\pm\sqrt{-48}}{4}$$

לא קיימים שורשים למשוואה ב-$\mathbb{R}$



יש שינוי יחיד בסי׳ מקמירות לקעירות ב- $\boxed{x=1}$

$\boxed{f(1)=0}$

$(1,0)$ — נק׳ פיתול

$\boxed{x<1\ ,\ x\neq -1}$ — ת. קמירות

$\boxed{x>1}$ — ת. קעירות

נבדוק אסימפטוטות משופעות:

$*\ y=mx+n\ ,\ x\to\infty$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}\cdot\frac{1}{x}=$$

מתחשבים במקדם הכי גבוה של החזקה

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+(\ldots)}{x^3+(\ldots)}=\boxed{1}$$

מקדם של החזקות מה-x

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^3 - x(x+1)^2}{(x+1)^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3} - x^2 + \cancel{x} - 1 - \cancel{x^3} - 2x^2 - \cancel{x}}{x^2+2x+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2-1}{x^2+2x+1} = \boxed{-3}$$

מתחשבים במקדמות הגבוהות של פולינום

לא נכון

אסימפטוטה עבור $x\to\infty$: $\boxed{y=x-3}$

* $y=mx+n$, $x\to-\infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}\cdot\frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+(\cdots)}{x^3+(\cdots)} = \boxed{1}$$

מתחשבים במקדמות הגבוהות

מקדמות יותר נמוכות מ x^3

$$n = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(x-1)^3 - x(x+1)^2}{(x+1)^2} = \cdots =$$

זה אותו פתרון הגבול כמו במקרה הקודם

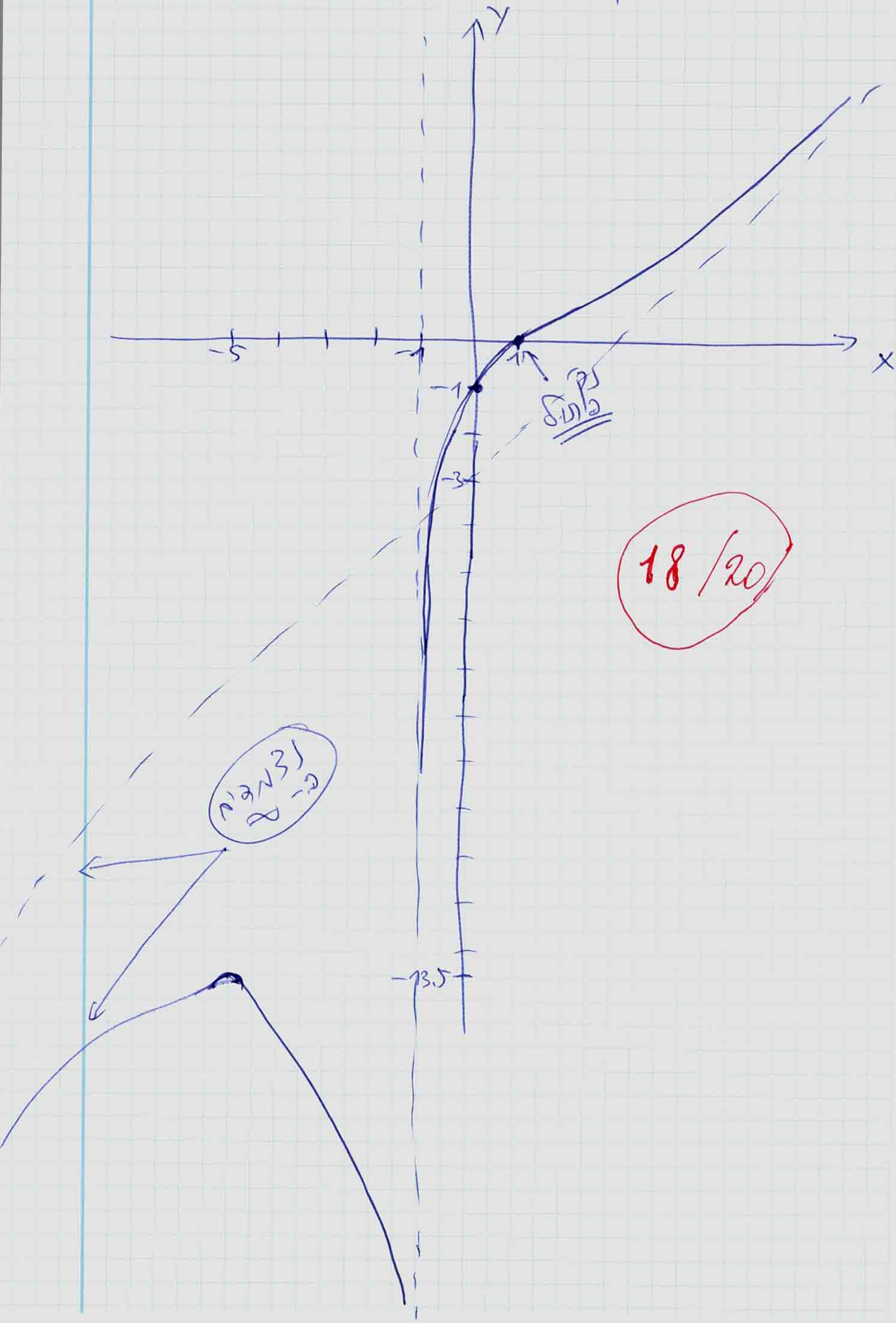
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2-1}{x^2+2x+1} = \boxed{-3}$$

מתחשבים במקדמות של הגבוהות הפולינום

לא נכון

קיימת אסימפטוטה ב- $x\to-\infty$: $\boxed{y=x-3}$

כעת נשרטט סקיצה של גרף הפ'!



6 (א) $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2)\,dt}{\int_0^{x^3} e^{t^2}\,dt} =$

כאשר $x\to0$ גבולות האינטגרלים שואפים שניהם להיות בין $\boxed{0}$ ל-$\boxed{0}$

האינט' עם גבולות זהים, ז"א בקטע שהוא בעצם נק' הוא 0 (לפי הגדרת האינטגרציה לפי רימן):

ולכן אנו מקבלים גבול מסוג "$\frac{0}{0}$" ולכן נוכל להשתמש בלופיטל:

$$\lim_{x\to0} \frac{\left[\int_0^x \sin(t^2)\,dt\right]'}{\left[\int_0^{x^3} e^{t^2}\,dt\right]'}$$

בשביל לגזור את האינטגרלים עם גבול תחתון קבוע נשתמש במשפט היסודי של חדו"א:

$$F'(x) = f(x)$$

פ' קדומה של $f(x)$

מכאן נוכל להסיק את הנוסחה:

$$\left(\int_a^{f(x)} g(s)\,ds\right)' = g(f(x))\cdot f'(x)$$

נחזור לגבול ונבצע את הגזירה:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(x^2)}{e^{(x^3)^2}\cdot 3x^2} = \lim_{x\to0} \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}\cdot\underbrace{\frac{\sin x}{x}}\cdot\frac{1}{3e^{x^6}}$$

גבול יסודי $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$

פה השתמשנו באריתמטיקה של גבולות (וכפל גבולות)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{3e^{x^6}} = \frac{1}{3e^{0^6}} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

הפ' רציפה ניתן להציב בגבול את הערך

10/10

(6) (ב)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(n+k)-\ln n}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\ln \frac{n+k}{n}\right)\cdot \frac{1}{n}$$

לפי חוקי לוג

לא תלוי ב-k ניתן להוציא מהסכום

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

לפי הסכום והגבול שקיבלנו, רוצים שזהו פיתוח של סכום רימן של הפ' $f(x)=\ln(1+x)$ בקטע $[0,1]$ עם חלוקה הבאה:

$$0 < \underset{\frac{1}{n}}{x_1} < \underset{\frac{2}{n}}{x_2} < \dots < x_{n-1} < \underset{\frac{n}{n}}{x_n} = 1$$

סה"כ מחלקים את הקטע $[0,1]$ ל-n חלקים שווים ולפי הנוסחה של סכום רימן:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot \Delta x_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_i)$$

ערך: הפ' איפשהו בקטע

אורך הקטע

כאשר הקטעים באורך שווים מוגדרים

שאתם במקרה שלנו זהו בדיוק הסכום שהתקבל מ-1 עד $\boxed{n}$. לאחר מכן נשאף לגבול $n\to\infty$.

ועבור החלוקה הזאת וגם כן עבור כל

מלבוקה יותרת שימור להתקבל האינטגרל המסוי"ם
של הפ' $f(x)$.

נסמן כל הגבול בעצם שאנו צריכים לחשב הוא
הגדרת הסכום של רימן בקטע $[0,1]$ של הפ'
$f(x)=\ln(x+1)$, הגבול הזה שווה בדיוק
לאינט' הבא:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)-\ln n}{n}=\int_0^1\ln(1+x)\,dx=$$

נבצע אינטגרציה בחלקים:

$$\left[\begin{array}{ll} u=\ln(1+x) & dx=dv \\ du=\frac{1}{1+x} & v=x \end{array}\right]$$

$$=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}\,dx$$

$$=1\cdot\ln(1+1)-0\cancel{\ln 1}-\int_0^1\frac{x+1-1}{x+1}\,dx$$

$$=\ln 2-\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\ln 2-\int_0^1 dx+\int_0^1\frac{1}{x+1}\,dx$$

$$=\ln 2-x\Big|_0^1+\ln|x+1|\Big|_0^1$$

$$=\ln 2-1+\cancel{0}+\ln|1+1|-\cancel{\ln|1|}$$

$$=2\ln 2-1\ \cancel{\approx\boxed{0.386}}$$

10/10

(4)

<u>נתונים:</u> f גזירה ב-$(-\infty,\infty)$.

$f(0)=0$

f' עולה בקטע $[0,\infty)$

$$g(x)=\begin{cases} f'(0) & , x=0 \\ \frac{f(x)}{x} & , x>0 \end{cases}$$

<u>צ"ל:</u> $g(x)$ פ' עולה בתחום הגדרתה.

<u>הוכחה:</u>

צריך להוכיח ש-$g(x)$ פ' עולה נוכיח שהיא עולה ~~בקטע~~ ~~$(0,\infty)$~~ קודם כל עבור $(0,\infty)$.

נוכיח שהנגזרת של $g(x)$ חיובית בת. $(0,\infty)$

(נגזרת חיובית של פ' בתחום גוררת שהפ' תהיה עולה בתח.)

נגזרת עבור $g(x)$ בקטע $(0,\infty)$ — $g'(x)=\frac{f'(x)\cdot x-1\cdot f(x)}{x^2}$ ← עבור $x>0$

תמיד חיובי

נותר להוכיח ש-

$$f'(x)\cdot x-f(x)>0$$

$$f'(x)\cdot x>f(x)$$

$$f'(x)>\frac{f(x)}{x}$$

$$\Updownarrow$$

x חיובי נתון, לכן לא משפיע על סימן האי-שוויון

נוכיח זאת האי-שוויון שהתקבל בעזרת משפט לגרנז'.

f גזירה בקטע $(-\infty,\infty)$ ולכן גם כן בקטע $[0,\infty)$

נבחר קטע סגור כלשהו $[0,M]$ — M יכול להיות גדול כרצוננו. $f(x)$ גזירה בקטע זה ולכן רציפה בו, גם כן ברור שהיא גזירה בקטע $(0,M)$.

f גזירה ב-$(0,M)$ ורציפה ב-$[0,M]$ ולכן

קיים $0<c<M$ כך, שמתקיים:

$$\frac{f(M)-f(0)}{M-0} = f'(c) < f'(M)$$

$f(0)=0$
לפי נתון

~~נתון~~

נתון גם כן f' היא פ' עולה ממש, ולכן:

ולכן שוב $c<M$ גורר: $f'(c)<f'(M)$.

ולכן נקבל אי-שוויון הבא:

$$\frac{f(M)}{M} < f'(M)$$

M זהו כל מס' בקטע $(0,\infty)$ ולכן נוכל

פשוט להציג (פשוט נחליף משתנה ל-x):

$$\frac{f(x)}{x} < f'(x) \quad \forall x \in (0,\infty)$$

זהו בדיוק האי-שוויון שאותו היינו אומרים

להוכיח בשביל להוכיח שהנגזרת של

הפ' $g(x)$ חיובית, ולכן $g(x)$ עולה בקטע

$(0,\infty)$.

נשאר רק להוכיח את העלייה של $g(x)$

עבור נק' בודדת $x=0$ (ביחס לכל השאר).

הפ' תהיה עולה אם $g(0)<g(x)$

עבור כל $0<x$

$$f'(0) < \frac{f(x)}{x}$$

עבור כל $0<x$

הנגזרת של f עולה עבור $[0,\infty)$.

זאת רוב השאלה הוכחתי - עליה על הפ' בקטע
$(-4, 0]$, נותר רק להוכיח ש- $g(x) \le g(0)$.

מחוסר זמן
להוכיח זאת
הטמרונה.

לכן ורכול
הטענה

~~$f'(0)$~~

~~מונו~~

~~$f'(0) = \frac{R(x)}{x}$ מונו~~